右辺のみに現れる変数を持つ右線形オーバーレイ項書換え系の最左最内ナローイングによる正規形の計算

西田 直樹 † 酒井 正彦 ‡ 坂部 俊樹 ‡

† 名古屋大学大学院工学研究科

‡ 名古屋大学大学院情報科学研究科

〒 464–8603 名古屋市千種区不老町

nishida@sakabe.nuie.nagoya-u.ac.jp {sakai,sakabe}@is.nagoya-u.ac.jp

Normal-form Computation by Left-most Innermost Narrowing on Right-linear Overlay Term Rewriting Systems with Extra Variables

Naoki NISHIDA† Masahiko SAKAI‡ Toshiki SAKABE‡

†Graduate School of Engneering, Nagoya University

‡Graduate School of Information Science, Nagoya University

Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Japan, 464-8603

あらまし 書換え規則の右辺のみに現れる変数（余剰変数）を持つことを許した項書換え系（TRS）を余剰変数付き TRS（EV-TRS）と呼ぶ．本稿では，右線形構成子 EV-TRS に対して，EV-TRS 上に拡張されたナローイングが停止する線形項のすべてのナローイングの正規形が最内戦略により求められることを示す．対象とする EV-TRS は左線形である必要はなく，規則に重なりを許されているので，一般には合流性を持たない．

キーワード 最内戦略，ナローイング

1 はじめに

項書換え系 (TRS) の逆計算への取り組みとして，逆計算 TRS を生成する手法がある [5]．関数 f の逆計算とは，与えられた v から $f(v_1, ..., v_n) = v$ を満たす v_1, ..., v_n を求めることであり，その逆演算 f^{-1} は $f^{-1}(v) = (v_1, ..., v_n)$ を満たす写像である．提案されたアルゴリズムは，与えられた構成子 TRS から，その逆計算をする余剰変数付き TRS（EV-TRS）を生成する．ここで，EV-TRS とは，書換え規則の右辺のみに現れる余剰変数と呼ばれる変数の出現を許す TRS である．EV-TRS は書換え関係が無限分岐であるが，EV-TRS 上に自然に拡張したナローイングで EV-TRS の書換えを模倣することにより計算できる [6]．この模倣では基礎項から始まるナローイング系列のみを扱う．ナローイングはほとんどの場合に停止性を持たないにも関わらず，基礎項から始まる無限の系列を持たないことが多い．そこで，著者らはこのような性質，すなわち，ナローイングの基礎項停止性を判定する手法を提案している [3, 6]．2 つの自然数の加算の逆計算から想像がつくように，逆計算は複数個の解を持つことが多い．そのため，生成される逆計算 EV-TRS は一般に合流性を持たない．よって，逆計算のすべての解を求めるためには全探索が必要であり，その計算量が膨大になる可能性がある．

一方，TRS が合流性を持たなくとも，停止性を持つ右線形オーバーレイ TRS では，与えられた項のすべての正規形は（最左，最右）最内書換えにより求めることができる [4]．

文献 [5] の手法により生成された逆計算 EV-TRS は構成子システムである．また，入力の TRS が消滅的でないときには，出力は TRS になる．入力が左線形ならば，生成された EV-TRS は右線形であ

る．構成子システムはオーバーレイであるので，消滅的でない左線形構成子 TRS から生成された逆計算 TRS が停止性を持つ場合には，文献 [4] の結果により最左最内書換えにより逆計算の効率を向上できる．通常，左非線形な TRS を扱うことは少ないが，消滅的であることは多い．したがって，文献 [4] の結果の EV-TRS 上への拡張が望まれる．

本稿では，右線形構成子 EV-TRS に対して，ナローイングが停止する線形項のナローイングによるすべての正規形が最内戦略により求められることを示す．

2 準備

本稿では，項書換え系の一般的な記法に従う [1, 2].

関数記号の集合 $\mathcal{F}$，変数の可算無限集合 $\mathcal{X}$，写像 $\mathtt{arity}: \mathcal{F} \to \mathbb{N}$（ただし，$\mathbb{N}$ は自然数の集合）から構成されるすべての**項**の集合を $T(\mathcal{F},\mathcal{X})$ とする．変数のない項を**基礎項**と呼び，その集合 $T(\mathcal{F},\emptyset)$ は $T(\mathcal{F})$ と略記する．項 s 中のどの変数も 1 回しか現れないとき，s は**線形**であるという．項 $t_1,...,t_n$ に現れる変数の集合を $\mathcal{V}ar(t_1,...,t_n)$ で表す．項 s と t が同一であるときは $s \equiv t$ と記述する．

$\Box$ を特別な定数とする．項 $C \in T(\mathcal{F}\cup\{\Box\},\mathcal{X})$ を**文脈**と呼ぶ．n 個の $\Box$ を持つ文脈の集合を $\mathscr{C}^n(\mathcal{F},\mathcal{X})$（単に，$\mathscr{C}^n$）とする．文脈 $C \in \mathscr{C}^n$ のすべての $\Box$ を左から順に項 t_i に置き換えて得られる項を $C[t_1,...,t_n]$ と表す．項 s，t について，$t \equiv C[s]$ を満たす文脈 C が存在するとき，s を t の**部分項**と呼び，$s \trianglelefteq t$ と記述する．特に，$C \not\equiv \Box$ のとき，s を t の**真部分項**と呼び，$s \triangleleft t$ と書く．

項 t の**位置**の集合 $\mathcal{O}(t)$ は次のように再帰的に定義される：(1) $t \in \mathcal{X}$ ならば，$\mathcal{O}(t) = \{\varepsilon\}$，(2) $t \equiv f(t_1,...,t_n)$ ならば，$\mathcal{O}(t) = \{\varepsilon\} \cup \bigcup_{i=1}^{n}\{\, ip \mid p \in \mathcal{O}(t_i)\,\}$．位置 p にある t の部分項を $t|_p$ で表す．文脈 $C \in \mathscr{C}^n$ の $\Box$ の位置を明記する場合は，$C[t_1,...,t_n]_{p_1,...,p_n}$ と書く．$\mathtt{top}(s)$ は項 s の先頭（位置 ε）の記号を表す．

代入 σ は $\sigma(x) \not\equiv x$ なる x が有限個であるような変数集合から項の集合への写像である．代入を表す記号として，σ，δ，θ を用いる．σ の定義域，値域はそれぞれ $\mathcal{D}om(\sigma) = \{\, x \mid x \in \mathcal{X}, \sigma(x) \not\equiv x \,\}$，$\mathcal{R}an(\sigma) = \{\, \sigma(x) \mid x \in \mathcal{D}om(x) \,\}$ と定義する．値域に現れる変数の集合は $\mathcal{VR}an(\sigma) = \bigcup_{t\in\mathcal{R}an(\sigma)} \mathcal{V}ar(t)$ と定義する．定義域が空の代入を $\emptyset$ で表す．$\mathcal{D}om(\sigma) = \{x_1,...,x_n\}$，$\sigma(x_i) \equiv t_i$ のとき，σ を $\{\, x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n \,\}$ と表す．代入は項上への写像に自然に拡張され，$\sigma(t)$ を $t\sigma$ と略記する．項 t に対して，$t\sigma$ を t の**具体項**と呼ぶことがある．代入 σ，θ について，$\mathcal{D}om(\sigma) = \mathcal{D}om(\theta)$ かつすべての $x \in \mathcal{D}om(\sigma)$ において $\sigma(x) \equiv \theta(x)$ のとき，$\sigma = \theta$ と記述する．σ と θ の合成は $\sigma\theta$ と記述し，$x\sigma\theta \equiv \theta(\sigma(x))$ と定義する．σ の定義域を $X \subseteq \mathcal{X}$ に制限した代入 $\sigma|_X$ は $\{\, x \mapsto x\sigma \mid x \in \mathcal{D}om(\sigma) \cap X \,\}$ と定義する．$\sigma\delta = \theta$ となる δ が存在するとき，$\sigma \lesssim \theta$ と記述する．σ が $s\sigma \equiv t\sigma$ を満たすとき，σ を s と t の**単一化子**と呼ぶ．このとき，s と t は**単一化可能**といい，$s \uparrow t$ と書く．s と t の任意の単一化子 θ について $\sigma \lesssim \theta$ であるとき，σ は**最汎**であるという．

次に，項上の抽象書換え系に関する定義を与える．項上の**抽象項書換え系**は $A = (T(\mathcal{F},\mathcal{X}), \Rightarrow)$ である．ここで，$\Rightarrow$ は項上の非反射的な 2 項関係である．$t \Rightarrow u$ ならば任意の $C \in \mathscr{C}^1$ について $C[t] \Rightarrow C[u]$ であるとき，$\Rightarrow$ は**単調**であるという．$\Rightarrow$ **系列**は項の有限の列 $t_0 \Rightarrow t_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow t_n$，もしくは無限の列 $t_0 \Rightarrow t_1 \Rightarrow \cdots$ である．特に，有限の $\Rightarrow$ 系列 $t \equiv t_0 \Rightarrow t_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow t_n$ は，$t_0 \stackrel{n}{\Rightarrow} t_n$ と表してもよい．$\Rightarrow$ の推移的反射的閉包を $\stackrel{*}{\Rightarrow}$ と書く．項 t からの無限の $\Rightarrow$ 系列が存在しないとき，t は $\Rightarrow$ に関して**停止**するという．すべての項が $\Rightarrow$ に関して停止するとき，A は $\Rightarrow$ **停止性**を持つという．特に，すべての基礎項が $\Rightarrow$ に関して停止するときは，A は $\Rightarrow$ **基礎項停止性**を持つという．項 s, t について $s \stackrel{*}{\Rightarrow} t$ とする．$t \Rightarrow u$ となる項 u が存在しないとき，t は s の $\Rightarrow$ **正規形**と呼ぶ．s のすべての $\Rightarrow$ 正規形の集合を $NF_s^{\Rightarrow}$ とする．すべての項のすべての $\Rightarrow$ 正規形の集合を $NF^{\Rightarrow}$ とする．$\Rightarrow$ 正規形でない項 t を $\Rightarrow$ **可簡略項**と呼ぶ．$\Rightarrow$ 可簡略項 t のすべての真部分項が $\Rightarrow$ 正規形であるならば，t は**最内**であるという．t が最内 $\Rightarrow$ 可簡略項かつ $t \Rightarrow u$ かつ $C[t] \Rightarrow C'[u]$ であるとき，$C[t] \underset{\mathrm{in}}{\Rightarrow} C'[u]$ と書き，$\underset{\mathrm{in}}{\Rightarrow}$ を**最内** $\Rightarrow$ **計算**という．さらに，t の左（右）に最内 $\Rightarrow$ 可簡略な部分項が存在しないとき，$\underset{\mathrm{lin}}{\Rightarrow}$（$\underset{\mathrm{rin}}{\Rightarrow}$）と記述し，**最左（最右）**最内 $\Rightarrow$ 計算という．任意の項 s, t, t' について，$s \stackrel{*}{\Rightarrow} t$ かつ $s \stackrel{*}{\Rightarrow} t'$ ならば $t \stackrel{*}{\Rightarrow} u$ かつ $t' \stackrel{*}{\Rightarrow} u$ を満たす項 u が存在するとき，A は**合流性**を持つという．A が合流性と $\Rightarrow$ 停止性を持つとき，R は**収束性**を持つという．項 s, t が互いの具体項であるとき，s と t は**名前替え**であるという．任意の項 s に対して，集合 $\{\, t \mid s \Rightarrow t \,\}$ が名前替えを法として有限であるとき，$\Rightarrow$ は**有限分岐**である

といい，そうでないとき**無限分岐**であるという．

$\mathcal{F}$ 上の**書換え規則**は次の条件を満たす 2 項組 (l, r) であり，l，r はそれぞれ**左辺**，**右辺**と呼ばれる $\mathcal{F}$ 上の項であり，l は変数ではない．(l, r) は $l \to r$ と書かれる．書換え規則は他の規則と区別できるラベル ρ を用いて $\rho : l \to r$ と書くこともあり，略記するために ρ のみを記述してもよい．書換え規則 $\rho : l \to r$ において，右辺のみに現れる変数 $x \in \mathcal{V}ar(r) \setminus \mathcal{V}ar(l)$ を**余剰変数**（extra variable）と呼ぶ．ρ の余剰変数の集合を $\mathcal{EV}ar(\rho)$ で表す．R を書換え規則の集合とすると，R によって定まる**書換え関係** $\to_R$ は $\to_R = \{\, (C[l\sigma]_p, C[r\sigma]_p) \mid \rho : l \to r \in R, C \in \mathscr{C}^1 \,\}$ と定義される．適用した規則 ρ と位置 p を明記する場合は，$s \to_R^{[p,\rho]} t$ もしくは $s \to_R^{p} t$ と記述する．$\mathcal{F}$ 上の**余剰変数付き項書換え系**（**EV-TRS**）は $(T(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \to_R)$ であり，単に R のみで表す．特に，どの規則も余剰変数を持たない EV-TRS は**項書換え系**（TRS）である．

R を $\mathcal{F}$ 上の EV-TRS とする．R の**被定義記号**と**構成子**の集合 $\mathcal{D}_R$ と $\mathcal{C}_R$ は $\mathcal{D}_R = \{\, \mathtt{top}(l) \mid l \to r \in R\}$，$\mathcal{C}_R = \mathcal{F} \setminus \mathcal{D}_R$ と定義される．$T(\mathcal{C}_R, \mathcal{X})$ の項を**構成子項**と呼ぶ．すべての規則 $f(t_1, ..., t_n) \to r \in R$ について各 t_i が構成子項であるとき，R を**構成子** EV-TRS と呼ぶ．書換え規則の左辺（右辺）が線形であるとき，その規則は**左（右）線形**であるという．R のすべての規則が左（右）線形であるとき，R は**左（右）線形**であるという．書換え規則の左辺 l と右辺 r が $\mathcal{V}ar(l) \subseteq \mathcal{V}ar(r)$ を満たすとき，その規則は**保存的**（non-erasing）であるという．R のすべての規則が保存的であるとき，R は**保存的**であるという．2 つの規則 $\rho : l \to r$，$\rho' : l' \to r'$ について，$l\sigma \equiv l_p\sigma'$ となる変数でない部分項 l_p と代入 σ，σ' が存在するとき，ρ は ρ' と位置 p で**重なりを持つ**という．R のすべての規則が互いに位置 ε 以外では重なりを持たないとき，R を**オーバーレイ**という．

3　EV-TRS 上のナローイング

EV-TRS 上のナローイングは次で定義される．

定義 1 ([6]) R を EV-TRS，s, t を項とする．p を s 中の位置，$\rho : l \to r \in R$ とする．このとき，$s|_p \notin \mathcal{X}$，$s \equiv C[u]_p$，$t \equiv (C[r]_p)\sigma$，$\mathcal{VR}an(\sigma) \cap (\mathcal{V}ar(s) \setminus \mathcal{D}om(\sigma)) = \emptyset$，$\mathcal{EV}ar(\rho) \cap \mathcal{D}om(\sigma) = \emptyset$ を満たす文脈 $C \in \mathscr{C}^1$，項 u，u と l の最汎単一化子 σ が存在するならば，s は σ，p，ρ のもとで t に**ナローイング可能**であるといい，$s \underset{\sigma|_{\mathcal{V}ar(s)}}{\rightsquigarrow}{}^{[p,\rho]}_{R}\, t$ と記述する．ただし，ρ の変数は常に新しい変数に名前替えされているとする．$\rightsquigarrow_R$ を R の**ナローイング**という．□

$$
\begin{array}{l}
g(0) \rightsquigarrow_{R_1} c(f(y,0), f(s(0),y)) \underset{\{y \mapsto 0\}}{\rightsquigarrow}{}_{R_1}\ c(f(0,0),0) \\
\qquad\qquad\qquad \underset{\{y \mapsto s(z)\}}{\rightsquigarrow}{}_{R_1}\ c(z, f(s(0), s(z)))
\end{array}
$$

図 1: R_1 による $g(0)$ からのナローイング系列．

$s \underset{\delta}{\rightsquigarrow}{}^{[p,\rho]}_{R}\, t$ の δ，p，ρ のどれをを省略してもよい．TRS 上のナローイングから拡張された点は，余剰変数は新しい変数のまま残すことである．また，文献 [6] と本稿では単一化子の定義に違いがあるが，本質的には等価である．$s \equiv t_0 \underset{\delta_0}{\rightsquigarrow}{}_R\, t_1 \underset{\delta_1}{\rightsquigarrow}{}_R \cdots \underset{\delta_{n-1}}{\rightsquigarrow}{}_R\, t_n \equiv t$ を $\rightsquigarrow_R$ 系列とするとき，$s \overset{n}{\underset{\delta}{\rightsquigarrow}}{}_R\, t$ と書く．ただし，$\delta = \delta_0\delta_1 \cdots \delta_{n-1}$ とし，$n = 0$ ならば $\delta = \emptyset$ とする．また，$t_0 \rightsquigarrow_R^{p_1} t_1 \rightsquigarrow_R^{p_2} \cdots \rightsquigarrow_R^{p_n} t_n$ かつ $p_i \neq \varepsilon$ のとき，$t_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}{}_R^{\varepsilon<}\, t_n$ と書く．EV-TRS R の書換え関係 $\to_R$ は一般には無限分岐であるが，ナローイング $\rightsquigarrow_R$ は有限分岐である [6]．

例 1 次の EV-TRS R_1 による $g(0)$ からのナローイングは図 1 のようになる．

$$
R_1 = \{\ g(x) \to c(f(y,x), f(s(x),y)),\quad f(s(x),0) \to x \ \}
$$
□

R を EV-TRS とする．任意の基礎項 s と項 t について，$s \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ ならば $s \overset{*}{\to}_R t$ である [6]．また，R が右線形であるときは，任意の基礎項 s, t について，$s \overset{*}{\to}_R t$ ならば $s \overset{*}{\rightsquigarrow}_R u$ かつ $u\theta \equiv t$ を満たす項 t' と代入 θ が存在する [6]．

4　ナローイングの最内戦略

本節では，停止性を持つ右線形オーバーレイ TRS に対して，(最左，最右）最内書換えは与えられた項のすべての正規形を求めることが可能という結果 [4] を EV-TRS 上のナローイングに拡張する．すなわち，右線形構成子 EV-TRS に対して，(最左，最右）最内ナローイングは $\rightsquigarrow_R$ に関して停止する線形項のすべての $\rightsquigarrow_R$ 正規形を求めることができることを示す（定理 1）．これらの結果の特徴は，対象のシステムに合流性を仮定しないことである．

本稿の結果は文献 [4] とは異なり，オーバーレイシステムの部分クラスである構成子システムを条件としている．本来，オーバーレイは危険対が位置 ε

でのみ重なりを生じるもののみであることを意図としている．しかし，ナローイングでは規則に重なりがなくとも危険対が生じる場合がある．TRS $R_2 = \{\, f(x, g(0)) \to x,\ g(s(x)) \to s(s(x)) \,\}$ には重なりがないが，$f(0, g(x))$ のナローイングを考えると両方の規則が適用可能である．これはオーバーレイの意図に反する．よって，オーバーレイシステムがナローイングにおいてもオーバーレイの意図を反映するとは限らない．一方，オーバーレイシステムの部分クラスである構成子システムではナローイングにおいてもオーバーレイの意図を保つ．よって，本稿では構成子 EV-TRS を対象とした．

定理 1 の準備として，まず，線形性と最内ナローイングに関する性質を示す．ナローイングの定義の $C[u]_p \rightsquigarrow_R (C[r]_p)\sigma$ からわかるように，$\rightsquigarrow_R$ は一般に単調ではない．これは単調である $\to_R$ との大きな違いであり，ナローイングに関する定理とその証明では考慮しなければならない．しかしながら，右線形 EV-TRS の場合には次の良い性質が成り立つ．

命題 1 R を右線形な EV-TRS とする．

(1) $s \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ かつ s が線形ならば t は線形である．

(2) $f(s_1, ..., s_n)$ を線形項とする．$f(s_1, ..., s_n) \overset{*}{\rightsquigarrow}{}_R^{\varepsilon<} f(t_1, ..., t_n)$ ならば，各 i について $s_i \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t_i$．

(3) 線形項上に制限した $\rightsquigarrow_R$ は単調である．すなわち，$f(s_1, ..., s_n)$ が線形かつ各 i について $s_i \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t_i$ ならば，$f(s_1, ..., s_n) \overset{*}{\rightsquigarrow}{}_R^{\varepsilon<} f(t_1, ..., t_n)$．

証明 R が右線形であるとき，$C[s]_p$ が線形かつ $C[s]_p \rightsquigarrow_R^p (C[r]_p)\sigma$ ならば $C\sigma \equiv C$ かつ $C[r\sigma]_p$ が線形であるので，明らかに成り立つ． □

上の命題より，右線形 EV-TRS での線形項から始まるナローイングでは変数の取り扱いの影響を気にしなくともよい．そのため，本稿の定理 1 は文献 [4] の TRS の場合と同様に証明できる．

代入 σ が次の 2 つを満たすとき，σ は**強線形**であるという：(1) 任意の $x \in \mathcal{D}om(\sigma)$ について，$x\sigma$ が線形，(2) 任意の $x, y \in \mathcal{D}om(\sigma)$ について，$x \not\equiv y$ ならば $\mathcal{V}ar(x\sigma) \cap \mathcal{V}ar(y\sigma) = \emptyset$．このとき，ナローイングの定義と命題 1 より次のことが成り立つ．

命題 2 R を右線形 EV-TRS，$\rho : l \to r \in R$ とする．このとき，任意の線形項 s について，$s \rightsquigarrow_R^{[p,\rho]} (C[r]_p)\sigma$ ならば $\sigma|_{\mathcal{V}ar(r)}$ は強線形である． □

次に，$\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}_R$ に関する性質を調べる．

補題 1 R を EV-TRS，s を項，t を $\rightsquigarrow_R$ 正規形とする．このとき，$s \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$ ならば，$s \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}{}_R^{\varepsilon<} u \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$ を満たす項 u が存在し，u のすべての真部分項は $\rightsquigarrow_R$ 正規形である．

証明 もし，途中に $\rightsquigarrow_R^{\varepsilon}$ がなければ u として t を採ればよい．そうでない場合は，$s \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}{}_R^{\varepsilon<} u \underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}{}_R^{\varepsilon} u' \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$ となる u と u' が存在する．u は最内であるので，定義よりそのすべての真部分項は $\rightsquigarrow_R$ 正規形である． □

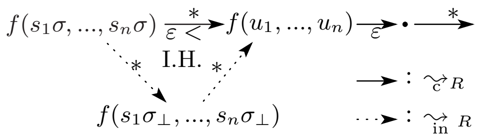


図 2: 補題 2 の証明.

σ を代入，$V \subseteq T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ とする．このとき，任意の $x \in \mathcal{D}om(\sigma)$ について $x\sigma \in V$ であるならば，σ を V **代入**という．σ を任意の $x \in \mathcal{D}om(\sigma)$ について $x\sigma$ が $\rightsquigarrow_R$ に関して停止する強線形な代入とする．このとき，$\mathcal{D}om(\sigma) = \mathcal{D}om(\sigma')$ かつ任意の $x \in \mathcal{D}om(\sigma')$ について $x\sigma \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R x\sigma' \in NF^{\rightsquigarrow_R}$ を満たす強線形な代入 σ' の集合を $Norm(\sigma)$ とする．

補題 2 R を右線形 EV-TRS，s を線形項，t を $\rightsquigarrow_R$ 正規形，σ を $\mathcal{D}om(\sigma) \subseteq \mathcal{V}ar(s)$ である強線形な代入とする．このとき，$s\sigma \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$ ならば，$s\sigma \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R s\sigma_\perp \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$ を満たす代入 $\sigma_\perp \in Norm(\sigma)$ が存在．

証明 s の構造に関する帰納法により示す．$s \equiv x \in \mathcal{X}$ の場合は，$x\sigma \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$ より，$\{x \mapsto t\} \in Norm(\sigma)$ であるので成り立つ．$s \equiv f(s_1, ..., s_n)$ の場合は，補題 1 より，$s\sigma \equiv f(s_1\sigma, ..., s_n\sigma) \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}{}_R^{\varepsilon<} f(u_1, ..., u_n) \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$ となる $u_i \in NF^{\rightsquigarrow_R}$ が存在する．命題 1 (2) より，$s_i\sigma \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R u_i$ である．よって，帰納法の仮定より，$s_i\sigma|_{\mathcal{V}ar(s_i)} \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R s_i\sigma_i \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R u_i$ を満たす強線形な代入 $\sigma_i \in Norm(\sigma|_{\mathcal{V}ar(s_i)})$ が存在する．任意の i, j（$i \neq j$）について $\mathcal{VR}an(\sigma_i) \cap \mathcal{VR}an(\sigma_j) = \emptyset$ かつ $\mathcal{V}ar(u_i) \cap \mathcal{V}ar(u_j) = \emptyset$ と仮定してもよいので，命題 1 (1), (3) より，$f(s_1\sigma_1, ..., s_n\sigma_n) \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R f(u_1, ..., u_n)$ かつ $f(u_1, ..., u_n)$ は線形．また，s が線形であるので，$\sigma_\perp = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i$ も強線形な代入であり，明らかに $\sigma_\perp \in Norm(\sigma)$ である．したがって，$f(s_1\sigma, ..., s_n\sigma) \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R f(s_1\sigma_\perp, ..., s_n\sigma_\perp) \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R f(u_1, ..., u_n) \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$（図 2）． □

次に，1 ステップのナローイングの性質を調べる．

命題 3 R を EV-TRS，s を線形項，u を構成子項，$\mathcal{V}ar(s) \cap \mathcal{V}ar(u) = \emptyset$ とする．このとき，$s \uparrow u$ ならば，$t \uparrow u$ である $t \in NF_s^{\rightsquigarrow_R}$ が存在する． □

補題 3 R を右線形構成子 EV-TRS，$u_1, ..., u_n$ を共通変数のない線形項，$\rho : l \to r \in R$，$\mathtt{top}(l) = f$ とする．このとき，$f(u_1, ..., u_n) \rightsquigarrow_R^{[\varepsilon,\rho]} r\sigma$ ならば，任意の代入 $\sigma_\perp \in \mathit{Norm}(\sigma)$ に対して $f(v_1, ..., v_n) \rightsquigarrow_R^{[\varepsilon,\rho]} r\sigma_\perp$ を満たす共通変数のない線形 $\rightsquigarrow_R$ 正規形 $v_1, ..., v_n$ が存在する． □

補題 4 $\Rightarrow$ を項上の 2 項関係とする．
(1) $\Rightarrow$ が単調ならば，$\rhd\cdot\Rightarrow\ \subseteq\ \Rightarrow\cdot\rhd$.
(2) $\Rightarrow$ が整楚ならば，$\Rightarrow \cup \rhd$ も整楚.

証明 (1) $s' \rhd t' \rightsquigarrow_R u'$ とする．このとき，$s' \equiv C[t']_p$（$\varepsilon < p$）かつ $t' \equiv C'[t'']q \rightsquigarrow_R^{[q,\rho]} C'\sigma[r\sigma]_q \equiv u'$ を満たす C，p，C'，t''，$\rho : l \to r \in R$，σ が存在する．よって，$s' \equiv C[C'[t'']_q]_p \rightsquigarrow_R^{[pq,\rho]} C\sigma[C'\sigma[r\sigma]_q]_p \rhd u'$ である．(2) 明らか． □

最内ナローイングには次の定理が成り立つ．

定理 1 R を右線形構成子 EV-TRS，s を $\rightsquigarrow_R$ に関して停止する線形な項とする．任意の $\rightsquigarrow_R$ 正規形 $t \in \mathit{NF}^{\rightsquigarrow_R}$ について，$s \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ ならば $s \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$.

証明 R が右線形であることと $\rightsquigarrow_R$ に関して停止する線形な s から始めた $\rightsquigarrow_R$ のみについて考えるので，$\rightsquigarrow_R$ は整楚かつ単調である．よって，$s \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ ならば，$s \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$ であることを $\rightsquigarrow_R \cup \rhd$ に関するネーター帰納法により示す.

途中に $\rightsquigarrow_R^\varepsilon$ がない場合は，命題 1 (2) と帰納法の仮定より明らか．そうでない場合は，$s \equiv f(s_1, ..., s_n) \overset{*}{\rightsquigarrow}{}_R^{\varepsilon<} f(u_1, ..., u_n) \rightsquigarrow_R^{[\varepsilon,\rho]} r\sigma \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ とおける．ここで，$\rho : l \to r \in R$，$\mathtt{top}(l) = f$ とする．このとき，命題 2 より，σ は強線形な代入である．$r\sigma \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ については，帰納法の仮定より，$r\sigma \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$．よって，補題 2 より，

$$r\sigma \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R r\sigma_\perp \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t \tag{1}$$

となる代入 $\sigma_\perp \in \mathit{Norm}(\sigma)$ が存在する．ここで，$f(u_1, ..., u_n) \rightsquigarrow_R^{[\varepsilon,\rho]} r\sigma$ であるので，補題 3 より，

$$f(v_1, ..., v_n) \rightsquigarrow_R^{[\varepsilon,\rho]} r\sigma_\perp \tag{2}$$

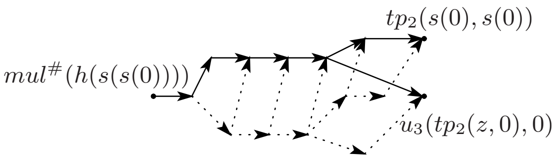
となる共通変数のない線形 $\rightsquigarrow_R$ 正規形 $v_1, ..., v_n$ が存在する．よって，$f(s_1, ..., s_n) \overset{*}{\rightsquigarrow}{}_R^{\varepsilon<} f(u_1, ..., u_n) \overset{*}{\rightsquigarrow}{}_R^{\varepsilon<} f(v_1, ..., v_n)$ である．ここで，命題 1 (2) より，$s_i \overset{*}{\rightsquigarrow}_R v_i$．よって，帰納法の仮定より，(3) $s_i \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R v_i$．したがって，(1), (2), (3) より，$f(s_1, ..., s_n) \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R f(v_1, ..., v_n) \underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}_R r\sigma_\perp \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$（図 3）． □

また，上の定理 1 から次の系が導かれる．

系 1 R を $\rightsquigarrow_R$ 基礎項停止性を持つ右線形構成子 EV-TRS とする．任意の基礎項 s と $\rightsquigarrow_R$ 正規形 t について，$s \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ ならば $s \overset{*}{\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}}_R t$. □

$$\begin{aligned} R_3 = \{\ & \mathit{add}^\#(y) \to \mathit{tp}_2(0, y), \\ & \mathit{add}^\#(s(z)) \to u_1(\mathit{add}^\#(z)), \\ & u_1(\mathit{tp}_2(x, y)) \to \mathit{tp}_2(s(x), y), \\ & \mathit{add}^\#(\mathit{add}(x, y)) \to \mathit{tp}_2(x, y), \\ & \mathit{mul}^\#(0) \to \mathit{tp}_2(0, y),\ \ \mathit{mul}^\#(0) \to \mathit{tp}_2(x, 0), \\ & \mathit{mul}^\#(s(z)) \to u_2(\mathit{add}^\#(z)), \\ & u_2(\mathit{tp}_2(w, y)) \to u_3(\mathit{mul}^\#(w), y), \\ & u_3(\mathit{tp}_2(x, s(y)), y) \to \mathit{tp}_2(s(x), s(y)), \\ & \mathit{mul}^\#(\mathit{mul}(x, y)) \to \mathit{tp}_2(x, y), \\ & h(0) \to 0,\ \ h(s(s(y))) \to s(h(x)) \qquad \} \end{aligned}$$

図 4: d, mul の逆計算 EV-TRS R_3 の規則.



$\cdots\rightarrow$: $\rightsquigarrow_{R_3}$（初期項から最内でつながらない）
$\longrightarrow$: $\underset{\text{in}}{\rightsquigarrow}_{R_3}$（初期項から最内でつながる）

図 5: $\mathit{mul}^\#(d^\#(s(s(0))))$ の $\rightsquigarrow_{R_3}$ による探索木.

例 2 右線形オーバーレイ EV-TRS $R_2' = R_2 \cup \{\ f(x, s(x)) \to s(s(x)),\ a \to f(0, g(y))\ \}$ を考える．a の $\rightsquigarrow_R$ 正規形は 0 と $s(s(0))$ であるが，最内ナローイングでは 0 に到達できない． □

これは，定理 1 で，構成子 EV-TRS の条件が必要であることを示している．

また，単調な $\Rightarrow$ については次が成り立つ．

定理 2 $\Rightarrow$ を項上の単調な関係，s を項，t を $\Rightarrow$ 正規形とする．このとき，$s \overset{*}{\underset{\text{in}}{\Rightarrow}}_R t$ ならば $s \overset{*}{\underset{\text{lin}}{\Rightarrow}}_R t$ かつ $s \overset{*}{\underset{\text{rin}}{\Rightarrow}}_R t$. □

よって，定理 1 は $\underset{\text{lin}}{\rightsquigarrow}_R$ と $\underset{\text{rin}}{\rightsquigarrow}_R$ についても成り立つ．

最後に，最左最内ナローイングにより逆計算の効率が改善される例を示す．d を自然数を 2 倍する関数，mul を 2 つの自然数を乗算する関数とする．このとき，次の方程式を解くことを考える．

$$d(\mathit{mul}(s(0), x) =^? s(s(0))$$

d, mul の逆演算を図 4 の R_3 で定義される h, $\mathit{mul}^\#$ とする（計算を簡単にするために，$d^\#$ より定義が簡潔な既知の h を用いた）と，$\mathit{mul}^\#(h(s(s(0))))$ を計算し，$\mathit{tp}_2(s(0), t)$ の形式をした正規形の t を解とすればよい．ここで，$\mathit{tp}_n(t_1, ..., t_n)$ は n 個の項の組 $(t_1, ..., t_n)$ を表現する．$\mathit{mul}^\#(h(s(s(0))))$ からのナローイングは図 5 のようになる．図 5 のグラフが有限であることより，$\mathit{mul}^\#(h(s(s(0))))$ は $\rightsquigarrow_R$ に関して停止する．ナローイングによる深さ優先の全探索は 33 ステップであるが，最内ナローイングでは

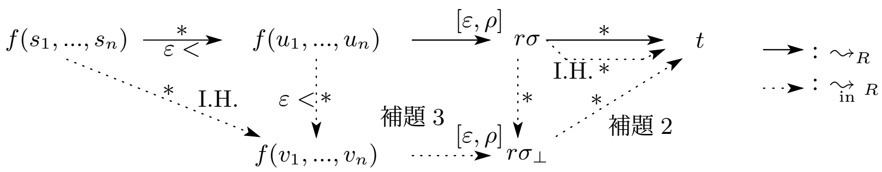


図 3: 定理 1 の証明.

8 ステップである．これは最内ナローイングにより逆計算の効率が向上したことを示す．

5 書換えとナローイングの正規形

本節では，右線形構成子 EV-TRS での線形項 s のすべての $\to_R$ 正規形と s から始めた $\underset{\text{in}}{\leadsto}_R$ 系列の間の関係を示す．例えば，$R_4 = \{ g(x) \to f(x,y), f(x,s(y)) \to x \}$ を考える．$g(0)$ を 1 ステップ書き換えて得られる項は $f(0,t)$（t は任意の項）と表現できる．また，$\mathtt{top}(t) = s$ のとき，$f(0,t) \xrightarrow{*}_{R_4} 0$ である．よって，$g(0)$ の $\to_{R_4}$ 正規形の集合は $NF^{\to_{R_4}}_{g(0)} = \{0\} \cup \{ f(0,t) \mid t \in NF^{\to_{R_4}}, \mathtt{top}(t) \neq s \}$ である．この集合は，$g(0) \leadsto_{R_4} f(0,y) \underset{\{y\mapsto s(z)\}}{\leadsto}_{R_4} 0$ から推定できる．

$s\theta$ を項，$V \subseteq NF^{\to_R}_{s\theta}$ とする．任意の $t \in V$ について，$s \overset{*}{\leadsto}_R u \overset{*}{\leadsto}_R \in NF^{\leadsto_R}_s$ かつ $t \equiv u\sigma$ を満たす項 u と代入 σ が存在するとき，$\leadsto_R$ は V を**導く**という．右線形構成子 EV-TRS では次のことが成り立つ．

定理 3 R を右線形構成子 EV-TRS，s を $\leadsto_R$ に関して停止する線形な項，θ を代入とする．このとき，$\underset{\text{in}}{\leadsto}$ は $NF^{\to_R}_{s\theta} \cap T(\mathcal{C}_R, \mathcal{X})$ を導く．

証明 t を $s\sigma$ の構成子 $\to_R$ 正規形とする．このとき，$s\theta \xrightarrow{*}_R t$ ならば，$s \overset{*}{\leadsto}_R u$ かつ $u\sigma \equiv t$ を満たす項 u と代入 σ が存在する [6]．t は構成子項なので u も構成子項である．構成子項は明らかに $\leadsto_R$ 正規形であるので，定理 1 より，$s \underset{\text{in}}{\overset{*}{\leadsto}}_R u$． □

上の定理は $V = NF^{\to_R}_{s\theta}$ については成り立たない．例えば，EV-TRS $R_5 = \{ g(s(x)) \to h(0), h(s(x)) \to x, f(x,y) \to x, a \to f(g(y),0) \}$ は $NF^{\leadsto_{R_5}}_a = \{ s(y) \}$ から $s(g(0)) \in NF^{\to_{R_5}}_a$ は得られない．一方，逆計算で望まれる解は構成子項である．よって，上の定理より解として必要な $\to_R$ 正規形は最内ナローイングによりすべて求められる．

6 まとめ

本稿では，右線形構成子 EV-TRS に対して，ナローイングが停止する線形項のすべての正規形を最内ナローイングにより求めることが可能であることを示した．

本研究の動機である逆計算 EV-TRS では，EV-TRS 自体はナローイングに関して停止性を持たなくても，計算したい項については停止性がある場合がある．例えば，R_3 は $\leadsto_{R_3}$ 基礎項停止性を持たないが，$add^{\#}(s^m(0))$，$mul^{\#}(s^n(0))$ は $\leadsto_{R_3}$ に関して停止する．これはそれぞれ m, n に関する帰納法により証明できる．よって，与えられた項のナローイングが停止するかを判定する手法を考案したい．また，TRS の基礎項上では $\to_R = \leadsto_R$ であるので，TRS R_2 にも定理 1 は適用可能と考えられる．よって，定理 1 の構成子システムであるという条件を緩めることができると予想される．本研究の結果と他のナローイングの戦略に関する結果を比較することも今後の課題である．

謝 辞 本研究は一部，21 世紀 COE プログラム（社会情報基盤のための音声・映像の知的統合），文部科学省科学研究費 (c)15500007 の補助を受けている．

参考文献

[1] F.Baader, and T.Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[2] J.W.Klop: Term Rewriting Systems. *Handbook of Logic in Computer Science*, vol.2, pp.2–117, Clarendon Press, Oxford, 1992.

[3] N.Nishida, M.Sakai and T.Sakabe: Narrowing-based Simulation of Term Rewriting Systems with Extra Variables and its Termination Proof. In Proc. of WFLP'03, pp.198–211, 2003.

[4] M.Sakai, K.Okamoto and T.Sakabe: Innermost Reductions Find All Normal Forms on Right-linear Terminating Overlay TRSs. In Proc. of WRS'03, pp.79–88, 2003.

[5] 西田, 酒井, 坂部： 指定した引数を固定した逆関数を定義する TRS の生成. 信学技報, COMP 2001-67 (2001-12), pp.33–40, 2001.

[6] 西田，酒井，坂部：右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系の計算モデル．コンピュータソフトウェア（掲載予定）.