社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系のナローイングに基づく実効的書換えとその停止性

西田 直樹† 酒井 正彦† 坂部 俊樹†

† 名古屋大学工学研究科
〒 464–8603 名古屋市千種区不老町
E-mail: †nishida@sakabe.nuie.nagoya-u.ac.jp, ††{sakai,sakabe}@nuie.nagoya-u.ac.jp

あらまし 右辺のみに現れる変数を持つ書換え規則を含む項書換え系 (EV-TRS) は，そのような規則による 1 ステップの書換えが無限分岐であること，さらに停止性を持たないことから，全く利用されなかった．そこで，我々は EV-TRS のための実効的な書換えとして，ナローイングを自然に拡張した EV ナローイングを提案し，EV-TRS の被定義記号の呼び出し関係を表した TRS が停止するときに元の EV-TRS の EV ナローイングも停止することを示した [11]．本稿では，依存対を用いた TRS の停止性証明の手法 [1] を EV ナローイングに拡張し，EV ナローイングの停止性を証明し，さらにその指針を与える．

キーワード TRS，ナローイング，停止性，依存対

Narrowing-based Effective Rewriting and its Termination for Term Rewriting Systems with Extra Variables

Naoki NISHIDA†, Masahiko SAKAI†, and Toshiki SAKABE†

† Graduate School of Engineering, Nagoya University
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464–8603 Japan
E-mail: †nishida@sakabe.nuie.nagoya-u.ac.jp, ††{sakai,sakabe}@nuie.nagoya-u.ac.jp

Abstract Term rewriting systems with extra variables (called EV-TRSs) were not used since each one-step reduction by their rule with extra variables is infinitely branching and they are not terminating. Then, we've proposed an effective rewriting technique, called EV-narrowing, which is a natural extension of narrowing, and shown that an EV-narrowing of an EV-TRS is terminating if a TRS which presents the relations between the original defined symbol's calls [11]. In this paper, we prove the termination of EV-narrowing and give an outline for it, extending and using the dependency pair technique [1] to prove the termination of TRSs.

Key words TRS, narrowing, termination, dependency pair

1. はじめに

右辺のみに現れる変数 (余剰変数) を持つ書換え規則を含む項書換え系 (EV-TRS) では，余剰変数に任意の項を代入して書き換えるので，余剰変数を持つ規則による 1 ステップの書換え関係が無限分岐となる．また，EV-TRS は停止性を持たない．そのため，計算機上で EV-TRS の任意の書換えをシミュレーションしてすべての正規形を求めることは不可能であり，全く利用されていなかった．しかし，余剰変数に代入する項を適切に選ぶことにより，望ましい正規形が得られる場合もある．例えば，加算，乗算を計算する次の TRS R_1 を考える．

$$
\begin{aligned}
R_1 = \{\, & 0 \times y \to 0,\ \ s(x) \times s(y) \to s(x \times s(y) + y), \\
& x \times 0 \to 0,\ \ 0 + y \to y,\ \ s(x) + y \to s(x + y) \,\}
\end{aligned}
$$

この R_1 が計算する加算，乗算の逆像を計算する EV-TRS R_2 は次のように生成される [10].

$$
\begin{aligned}
R_2 = \{\, & +^{\#}(y) \to tp_2(0, y),\ \ +^{\#}(s(z)) \to u_1(+^{\#}(z)), \\
& u_1(tp_2(x, y)) \to tp_2(s(x), y), \\
& \times^{\#}(0) \to tp_2(0, y),\ \ \times^{\#}(0) \to tp_2(x, 0), \\
& \times^{\#}(s(z)) \to u_2(+^{\#}(z)), \\
& u_2(tp_2(w, y)) \to u_3(\times^{\#}(w), y), \\
& u_3(tp_2(x, s(y)), y) \to tp_2(s(x), s(y)), \\
& +^{\#}(x + y) \to tp_2(x, y),\ \ \times^{\#}(x \times y) \to tp_2(x, y) \,\}
\end{aligned}
$$

乗算すると 4 になる 2 つの正整数を R_2 により計算，すなわち，$\times^{\#}(s^4(0))$ を書き換えることを考える．書き換える際に余剰変数には適当な項 $s^n(0)$ を入れると，その正規形は $tp_2(s(0), s^4(0))$, $tp_2(s^2(0), s^2(0))$, $tp_2(s^4(0), s(0))$ の解の組を表す項 3 つと，u_i を含み解として不適切な項が 13 個得られる．このように余剰変数に $s^n(0)$ の形をした項を代入して書き換えるだけで十分な計算が可能であるにもかかわらず，R_2 は一般の定義の書換えのままでは計算機上では実行できない．

そこで，我々は，ナローイング [3], [5], [9] を EV-TRS 上の書換えへ自然に拡張した EV ナローイングを提案し，EV ナローイングの任意の 1 ステップが有限分岐になること，EV ナローイングが一般の定義の書換えの拡張であることを示した [11]．そして，EV ナローイングの書換え系列に対応した書換え系列が存在すること (健全性)，また，余剰変数から出現した項の部分項では書換えない書換え系列 (実効的書換え系列) と右線形な TRS の書換え系列は EV ナローイングによりシミュレーションできること (完全性) を示した．さらに，EV-TRS の被定義記号の呼び出し関係を表した TRS が停止するとき，元の EV-TRS の EV ナローイングが停止することを証明した．

本稿では，依存対を用いた TRS の停止性の証明 [1] を EV ナローイングに拡張し，EV ナローイングが停止するための条件の 1 つ，すなわち，EV-TRS の余剰変数を取り除いて得られた TRS が停止するならば元の EV-TRS における基礎項からの EV ナローイングが停止することを示す．さらに，任意の項の EV ナローイングが停止するための条件も示す．また，EV ナローイングが停止するかを判定するための指針を与える．

ナローイングについては多くの研究がされているが，EV-TRS 自体はこれまで全く研究されていない．依存対を用いた EV ナローイングの停止性証明に関連した研究としては，依存対をナローイング対に拡張した TRS の停止性証明法 [1] があるが，EV-TRS に対してはそのままでは停止性の証明には全く効果がない．

2. 準　　備

本稿は項書換え系の一般的な記法に従う [2], [6]．本節では，本稿における重要な記法のみを簡単に説明する．

関数記号，変数の集合をそれぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{X}$ とする．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{X}$ の記号から構成される項の集合を $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ で表す．基礎項の集合 $T(\mathcal{F}, \emptyset)$ を単に $T(\mathcal{F})$ と書く．項 t に出現する変数の集合を $\mathcal{V}ar(t)$ で表す．項 s, t が同一であるとき $s \equiv t$ と記述する．$top(t)$ は項 t の先頭の記号を表し，$t \equiv f(t_1, ..., t_n)$ ならば $top(t) = f$ である．

項 t のポジションの集合は $\mathcal{O}(t)$ で表し，関数記号のポジションの集合 $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(t)$ と変数のポジションの集合 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(t)$ に分ける．$p, q \in \mathcal{O}(t)$, $pp' = q$ を満たす p' が存在するとき，$p \leqq q$ と書く．文脈 C 中の $\Box$ のポジションを明記する場合は，$C[, ...,]_{p_1,...,p_n}$ (ただし，$p_i \in \mathcal{O}(C)$ かつ $C|_{p_i} \equiv \Box$) と記述する．

代入 σ の定義域，値域はそれぞれ $\mathcal{D}om(\sigma) = \{x \mid \sigma(x) \not\equiv x\}$, $\mathcal{R}ng(\sigma) = \{ t \mid x \in \mathcal{D}om(\sigma), x\sigma \equiv t \}$ と定義する．値域の集合に現れる変数の集合は $\mathcal{R}ng_{\mathcal{X}}(\sigma) = \{ x \mid t \in \mathcal{R}ng(\sigma), x \in \mathcal{V}ar(t) \}$ である．代入を表す記号として σ, δ, θ を用いる．$\mathcal{R}ng_{\mathcal{X}}(\sigma) = \emptyset$ を満たす代入 σ を基礎代入と呼ぶ．代入の定義域は項に自然に拡張され，σ の項 t への適用を $t\sigma$ で表す．σ の定義域に制限 V の付いた代入は，$\sigma|_V = \{ x \mapsto t \mid x \in V \cap \mathcal{D}om(\sigma), x\sigma \equiv t \}$ と定義する．代入 σ, σ' に対し $\exists\theta, \forall x \in \mathcal{D}om(\sigma) \cup \mathcal{D}om(\sigma'), x\sigma\theta \equiv x\sigma'$ のとき，$\sigma \lesssim \sigma'$ と書く．

2 つの項 s, t に対して $s\sigma \equiv t\sigma'$ を満たす代入の組 (σ, σ') を s と t の単一化子と呼ぶ(注1)．また，s と t のすべての単一化子 (θ, θ') に対して，$\sigma \lesssim \theta, \sigma' \lesssim \theta'$ を満たす s と t の単一化子 (σ, σ') を最汎単一化子と呼び，$(\sigma, \sigma') \in \mathtt{mgu}(s, t)$ と書く．

$l \to r$ は**書換え規則**と呼ばれる．ここで，l $(\notin \mathcal{X})$, r はそれぞれ規則の左辺，右辺と呼ばれる項である．書換え規則は，他の規則と識別できるラベル ρ を付けて $\rho : l \to r$ と書くこともある．$\mathcal{V}ar(l) \supseteq \mathcal{V}ar(r)$ を満たす書換え規則 $l \to r$ の集合 R を**項書換え系** (TRS) と呼ぶ．R から定まる項上の 2 項関係 $\to_R$ は，$\to_R = \{ (C[l\sigma]_p, C[r\sigma]_p) \mid \rho : l \to r \in R, C \in T(\mathcal{F} \cup \{\Box\}, \mathcal{X}) \}$ と定義され，**書換え関係**と呼ぶ．ポジション p と適用した規則 ρ を明記するときは $s \xrightarrow{[p,\rho]}_R t$ と書く．ρ を省略して $s \xrightarrow{p}_R t$ と書いてもよい．$\xrightarrow{*}_R$ は $\to_R$ の推移反射閉包である．$\xrightarrow{n}_R$ は n ステップの書換えを表す．書換え関係によって作られる項の系列を**書換え系列**と呼ぶ．項 t から始まる (R の) 無限の書換え系列が存在しないとき，t は (R に関して) **停止する** (あるいは，**SN** である) という．また，任意の項が R に関して停止するとき，R は**停止する** (SN である) という．

次に，本稿で扱う EV-TRS の定義を示す．規則 ρ の右辺にのみ現れる変数を**余剰変数**と呼び，その集合を $\mathcal{EV}ar(\rho)$ と書く．余剰変数を持つ書換え規則を含むことを許す書換え規則の集合を **EV-TRS** と呼ぶ．EV-TRS のクラスは TRS のクラスを含む．EV-TRS の書換え関係も TRS と同様に定義され，$\to_R$ を用いる．$\mathcal{V}ar(l) \not\supseteq \mathcal{V}ar(r)$ となる規則 $l \to r$ が EV-TRS R に 1 つでも存在するならば，R は SN でない．

右辺が変数である書換え規則を**崩壊規則**と呼ぶ．崩壊規則を含む EV-TRS は崩壊的であるといい，全く含まないときは**崩壊的でない**という．R を $\mathcal{F}$ 上の EV-TRS とする．このとき，被定義記号の集合 $\mathcal{D}_R$ は $\{ top(l) \mid l \to r \in R \}$ と定義される．また，構成子の集合 $\mathcal{C}_R$ は $\mathcal{F} - \mathcal{D}_R$ と定義される．

最後に，1 ステップの書換えにおける決定性に関する定義を与える．EV-TRS R において，いかなる項 s についても $\{ t \mid s \to_R t \}$ が有限集合であるとき $\to_R$ は**有限分岐**，それ以外のとき**無限分岐**であるという．TRS R の規則が有限であれば $\to_R$ は有限分岐であるが，EV-TRS の書換え関係は無限分岐である．

[**例** 2.1]　$R_3 = \{ \rho_1 : f(x, 0) \to x,\ \rho_2 : g(x) \to f(x, y) \}$ は EV-TRS である．$g(0)$ は，ρ_2 により，$f(0, 0)$, $f(0, s(0))$,

(注1)：一般に，単一化子は 1 つの代入で定義されるが，単一化する 2 つの項には共通変数がないという条件がある．ナローイングによる書換えでは，規則の左辺との単一化が行われ，その際の名前替えを省略するために，本稿では 2 つの代入の組を単一化子とした．

$f(0, s(g(s(0))))$, ... など $f(0,t)$ の形 (t は任意の項) をしたどの項にも書き換えることができる．よって，$\rightarrow_{R_3}$ は無限分岐である． □

3. EV ナローイング

この節では，EV ナローイングの定義を与え，書換え系列との関係を明らかにする [11].

EV ナローイングはナローイング [5], [8], [9] を EV-TRS の書換えへ自然に拡張したものである．具体的に拡張した点は，余剰変数にはそれまでの系列上に現れていない変数を代入することである．例 2.1 の R_3 による $g(0)$ の EV ナローイングは

$$g(0) \rightharpoonup_{R_3} f(0,y) \underset{\{y \mapsto 0\}}{\rightharpoonup}_{R_3} 0$$

となる．EV ナローイングの定義は次のようになる．

[**定義** 3.1]　R を EV-TRS とする．次のように定義される項上の 2 項関係 $\rightharpoonup_R$ を **EV ナローイング** (関係) と呼ぶ.

$$\begin{aligned}\rightharpoonup_R\ = \{\, (C[t], C\delta[r\sigma]) \mid {} & \rho : l \rightarrow r \in R, \\ & t \notin \mathcal{X}, (\delta,\sigma) \in \mathtt{mgu}(t,l), \\ & (\forall x \in \mathcal{EV}ar(\rho), \\ & \ x\sigma \in \mathcal{X} - (\mathcal{V}ar(C[t]) \cup \mathcal{R}ng_{\mathcal{X}}(\delta)))\,\}\end{aligned}$$

δ を **EVN 代入**と呼び，δ で項 s が項 t に書き換えられるとき $s \underset{\delta}{\rightharpoonup}_R t$ と書く．また，δ は省略してもよい． □

この定義は，ナローイング書換えの定義に対して余剰変数にはそれまで使われてない新しい変数を代入する条件を追加したものである．$n+1$ ステップの EV ナローイングは $\overset{n+1}{\underset{\delta'\delta}{\rightharpoonup}}_R = \overset{n}{\underset{\delta'}{\rightharpoonup}}_R \underset{\delta}{\rightharpoonup}_R$ で定義され，0 回以上のステップの EV ナローイングを $\overset{*}{\underset{\delta}{\rightharpoonup}}_R$ と書く．ポジションと適用した規則を明記するときは $s \underset{\delta}{\rightharpoonup}{}^{[p,\rho]}_R t$ と書く．ρ を省略して $s \underset{\delta}{\rightharpoonup}{}^{p}_R t$ と書いてもよい．EV ナローイングにより作られる項の系列を **EVN 系列**，特に，基礎項から始まる EVN 系列を**基礎 EVN 系列**と呼ぶ.

上の定義 3.1 より，EV ナローイングの 1 ステップの書換えが有限分岐であることは明らかである．さらに，TRS R について，基礎項上では $\rightarrow_R = \rightharpoonup_R$ である．一般の書換え $\rightarrow_R$ では変数を含む項も対象としているが，書換え系列上に現れる変数は定数とみなしても差し支えない．よって，基礎項の書換え系列を考えるだけで十分である．以降，書換え系列については基礎項上のものだけを考える.

次に，EV ナローイングの完全性に大きく関係のある実効的書換え系列の定義を与える．実効的書換え系列とは，余剰変数から出現した項の部分項では書き換えがない書換え系列のことである．典型的な例は，余剰変数には正規形のみを代入する書換え系列である．実効的書換え系列の定義は文献 [11] では与えらていないが，完全性 (定理 3.5) の証明に影響はない.

t を項，$x \in \mathcal{V}ar(t)$ とする．$\mathcal{O}_x(t)$ は t 中の x のポジションの集合を表し，$\mathcal{O}_x(t) = \{\, p \mid p \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(t), t|_p \equiv x \,\}$ と定義される．また，$P, Q \subseteqq \mathcal{O}(t)$ とする．$\forall q \in Q, \exists p \in P, p \leqq q$ のとき，$P \leqq Q$ と記述する．$P \backslash p$ は接頭辞として p を持つ P 中のポジションから p を取り除いたポジションの集合を表し，$P \backslash p = \{\, q \mid pq \in P \,\}$ と定義する．P は書換え禁止となる t のポジションの集合として用いるので，極小のポジションのみを考えればよい．例えば，$\{11, 1, 2\}$ を考えると，1 は 11 を含むので $\{1, 2\}$ を考えればよい．P の極小集合を $min(P)$ で表し，$min(P) = \{\, p \mid p \in P, (\forall q \in P, q \not< p) \,\}$ と定義する．さらに，P, Q の和の極小集合である極小和 $P \sqcup Q$ $(\subseteqq \mathcal{O}(t))$，共通部分の極小集合である極小積 $P \sqcap Q (\subseteqq \mathcal{O}(t))$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} & P \sqcup Q = min(P \cup Q) \\ & P \sqcap Q = \{\, p \mid p \in min(P), (\,\exists q \in min(Q), q \leqq p\,) \,\} \\ & \qquad\qquad \cup \{\, q \mid q \in min(Q), (\,\exists p \in min(P), p \leqq q\,) \,\} \end{aligned}$$

例えば，$P = \{11, 2\}$, $Q = \{112, 2, 31\}$ を考えると，$P \sqcup Q = \{11, 2, 31\}$, $P \sqcap Q = \{112, 2\}$ となる.

項とその項のポジションの部分集合が 1 ステップの書換えでどのように変化するかを考える．左線形な TRS に関しては，1 ステップの書換えの際のリデックス (規則を適用できる項) のポジションの遷移を決定する定義がある [4]．これを左線形でない場合の任意のポジションの遷移として以下のように拡張する.

[**定義** 3.2]　書換え規則 $\rho : l \rightarrow r \in R$ とポジション p に対して，ポジションの集合 P, Q が次の条件を満たすならば，$P \sqsupset^p_\rho Q$ と表す.

$$\begin{aligned} Q = {} & \{\, q \mid q \in P, p \not\leqq q \,\} \\ & \sqcup \Big(\bigsqcup_{x \in \mathcal{V}ar(l)} \{\, pqw \mid r|_q \equiv x, w \in \big(\bigsqcap_{q' \in \mathcal{O}_x(l)} P \backslash pq' \big) \,\} \Big). \end{aligned}$$ □

P 中のポジションは，適用される規則の変数によって遷移し，その変数が左辺に複数個ある場合は $\wedge$ によって共通部分をとる．例えば，項 $t \equiv c(f(h(0), h(0)), s(0))$ が規則 $\rho : f(x,x) \rightarrow s(g(x))$ によって書き換えられる場合を考える．このとき，$\{11, 121, 2\} \subseteqq \mathcal{O}(c(f(h(0), h(0)), s(0)))$ とすると，$\{11, 121, 2\} \sqsupset^1_\rho \{121, 2\}$ となる．定義 3.2 中の P をその項の部分項では書換えを禁止したいポジションの集合とみなすと，$\sqsupset^p_\rho$ はこの 1 ステップの書換えによる書換え禁止のポジションの遷移を表し，Q がその結果となる．これを利用して，実効的書換え系列を定義する.

[**定義** 3.3]　R を EV-TRS，$s_0 \rightarrow^{[p_0, \rho_0]}_R s_1 \rightarrow^{[p_1, \rho_1]}_R \cdots$，$\rho_i : l_i \rightarrow r_i \in R$ $(i \geqq 0)$ とする．このとき，次の 3 つを満たす $P_0, P_1, \ldots$ が存在するとき，この系列は**実効的である** (**実効的書換え系列**) といい，ポジションの遷移を明記する場合には $P_0 : s_0 \rightarrow^{[p_0, \rho_0]}_R P_1 : s_1 \rightarrow^{[p_1, \rho_1]}_R \cdots$ と書く.

- $P_0 = \emptyset$，$P_i \subseteqq \mathcal{O}(s_i)$ $(i > 0)$.
- $\forall q \in P_i, q \not\leqq p_i$.
- $P_i \sqsupset^{p_i}_{\rho_i} P'_i$ かつ $P_{i+1} \leqq P'_i$ を満たす $P'_i \subseteqq \mathcal{O}(s_{i+1})$ が存在し，$P_{i+1} \leqq \bigsqcup_{x \in \mathcal{EV}ar(\rho_i)} \{\, p_i q \mid q \in \mathcal{O}_x(r_i) \,\}$ である． □

最後に，EVN 系列に対応する書換え系列が存在すること (健全性)，実効的書換え系列と右線形な EV-TRS の書換え系列に対応する EVN 系列が存在すること (完全性) を示す．なお，文献 [11] には，一般には書換え系列に対応する EVN 系列が存在しない例を示している.

[**定理** 3.4]（[11]）R を EV-TRS とする．任意の基礎項 s と項 t について，$s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightharpoonup}}_R t$ ならば $s \overset{*}{\rightarrow}_R t$ である．さらに，これら

の系列には同じポジションに同じ規則が順に適用される． □

[**定理** 3.5]（[11]） R を EV-TRS とする．任意の基礎項 s,t について，$s \overset{*}{\to}_R t$ が実効的ならば $s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightharpoondown}}_R t'$ かつ $t \equiv t'\theta$ となる項 t' と代入 θ が存在する．さらに，これらの系列には同じポジションに同じ規則が順に適用される． □

実際の書換え (特に，コンストラクターシステムにおいては) では余剰変数には正規形を代入することがほとんどであるので，扱う書換え系列は実効的である．したがって，EV ナローイングの完全性は，定理 3.5 を示すだけで十分であるといえる．

[**定理** 3.6]（[11]） R を右線形な EV-TRS とする．任意の基礎項 s,t について，$s \overset{*}{\to}_R t$ ならば $s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightharpoondown}}_R t'$ かつ $t \equiv t'\theta$ となる線形な項 t' と代入 θ が存在する． □

4. EV ナローイングの停止性

前節で述べたように，EVN 系列と実効的書換え系列には強い関係がある．しかし，無限の EVN 系列に対応した無限の実効的書換え系列が存在しない場合があるために，実効的書換え系列を利用して EV ナローイングの停止性を調べることはできない．例えば，EV-TRS $R_4 = \{\, \mathit{half}(0) \to 0,\ \mathit{half}(s^2(x)) \to s(\mathit{half}(x)),\ a \to \mathit{half}(x) \,\}$ を考える．b からの EVN 系列には，$\mathit{half}(x)$ が無限に繰り返される系列が存在する．しかし，b からの実効的書換え系列は，$b \to_{R_4} \{1\} : \mathit{half}(t)$ となり，$t \equiv s^n(t')$ $(\mathit{top}(t') \neq s)$ のときは $s(\cdots(s(\mathit{half}(t')))\cdots)$ $(t' \equiv 0$ ならば $s(\cdots(s(0))\cdots))$ まで書き換えて停止し，それ以外のときは $\mathit{half}(t)$ からは書き換えられない．したがって，b からの無限の EVN 系列に対応した実効的書換え系列は存在しない．本節では，依存対を用いた TRS の停止性証明の手法 [1] を EV ナローイングに拡張し，EV ナローイングが停止するかどうかを判定する指針を示す．

R を EV-TRS, t を項とする．t からの R による無限の EVN 系列が存在しないとき，t は R に関して **EV-SN** であるという．任意の項が R に関して EV-SN であるとき，R は **EV-SN** であるという．さらに，任意の基礎項が R に関して EV-SN であるとき，R は **EV-GSN** であるという．EV-TRS の書換え系列をシミュレーションする場合には，基礎項からの EVN 系列のみ考えるので EV-GSN であればよい．EV-SN と EV-GSN の間には明らかに次の性質が成り立つ．

[**命題** 4.1] EV-TRS R が EV-SN ならば，R は EV-GSN である． □

上の命題の逆は成り立たない．前述の $\{\, f(s(x)) \to f(x) \,\}$ を考えると，任意の基礎項は EV-SN であるが，$f(y)$ の EV ナローイングは停止しないのでこの TRS は EV-SN ではない．また，TRS については，明らかに以下の命題が成り立つ．

[**命題** 4.2] TRS R が SN であるとき，かつそのときに限り，R は EV-GSN である． □

本節で用いる依存対を定義する．そのために，$\mathcal{F}$ のそれぞれの被定義記号に対応する $\mathcal{F}$ にない異なる新しい記号を用意する．$f \in \mathcal{D}_R$ に対応する $\mathcal{F}$ にない新しい記号を f の**キャピタル記号**と呼ぶ．本稿では，$\mathcal{F}$ の記号には小文字を用い，$\mathcal{D}_R$ の先頭の記号のみを大文字にした記号をそのキャピタル記号として用いる．例えば，被定義記号 abc のキャピタル記号は Abc となる．$\mathcal{D}_R$ に対するキャピタル記号の集合を $\overline{\mathcal{D}}_R = \{F \mid f \in \mathcal{D}_R\}$ とする．また，$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{D}}_R$ とする．EV-TRS の依存対は TRS の依存対の定義をそのまま用いる．

[**定義** 4.3] R を EV-TRS, $\rho : f(s_1,...,s_n) \to r \in R$, $r|_p \equiv g(t_1,...,t_m)$ かつ $g \in \mathcal{D}_R$ とする．このとき，$\langle F(s_1,...,s_n), G(t_1,...,t_m)\rangle$ を R の**依存対**と呼ぶ．R の依存対の集合を $\mathcal{DP}_R$ と記述する． □

[**例** 4.4] 次のように定義される EV-TRS を考える．

$$R_5 = \{\, \mathit{half}(0) \to 0, \qquad \mathit{half}(s^2(x)) \to s(\mathit{half}(x)), \\ a \to \mathit{half}(c(x)) \qquad\qquad\qquad \}$$

half のキャピタル記号を H と省略することとすると，この EV-TRS の依存対は次のようになる．

$$\mathcal{DP}_{R_5} = \{\, \langle H(s^2(x)), H(x)\rangle,\ \langle A, H(c(x))\rangle \,\}$$ □

依存対 $\langle s,t\rangle$ において，t にしか現れない変数も余剰変数と呼び，その集合を $\mathcal{EV}ar(\langle s,t\rangle)$ で表す．すなわち，$\mathcal{EV}ar(\langle s,t\rangle) = \mathcal{V}ar(t) - \mathcal{V}ar(s)$ である．また，s, t を書換え規則と同様にそれぞれ左辺，右辺と呼ぶ．

4.1 EVN チェーンと EV ナローイングの停止性

まずは，R チェーン [1] の定義を次のように EV ナローイングに拡張する．

[**定義** 4.5] R を EV-TRS とする．R の依存対の系列 $\langle s_1,t_1\rangle\langle s_2,t_2\rangle$... 上の任意の連続した依存対 $\langle s_i,t_i\rangle, \langle s_{i+1},t_{i+1}\rangle$ について $t_i\sigma_i|_{\mathcal{V}ar(s_i)} \overset{*}{\rightharpoondown}_R s'_{i+1}$ (ただし，$\mathcal{EV}ar(\langle s_i,t_i\rangle \cap \mathcal{R}ng_{\mathcal{X}}(\sigma_i|_{\mathcal{V}ar(s_i)}) = \emptyset$) かつ $(\delta_i,\sigma_i) \in \mathtt{mgu}(s'_i,s_i)$ を満たす $s'_1,s_1,\ s'_2,s_2,...,$ の最汎単一化子 $(\delta_1,\sigma_1),(\delta_2,\sigma_2),...$ が存在するならば，この系列 $\langle s_1,t_1\rangle\langle s_2,t_2\rangle$... を R **EVN チェーン** (単に，EVN チェーン) という (図 1)．さらに，$s_0 \overset{*}{\rightharpoondown}{}^{\varepsilon<}_R s'_1$ かつ $(\delta_1,\sigma_1) \in \mathtt{mgu}(s'_1,s_1)$ である基礎項 s_0 が存在するならば，**基礎** R **EVN チェーン**といい，$s_0\langle s_1,t_1\rangle\langle s_2,t_2\rangle$... と記述する． □

s'_1 が任意の項である場合が R EVN チェーンであり，ある基礎項 s_0 から EV ナローイングして到達できる項である場合が基礎 R EVN チェーンである．$\mathit{top}(s_1) = F_1$ とすると，EVN チェーンのみを考える場合には，s'_1 として $F_1(x_{1,1},...,x_{1,n_1})$ をとれば十分である．

[**例** 4.6] 例 4.4 の R_5 を考える．次の 2 つの依存対の系列はそれぞれ，R_5 EVN チェーン，基礎 R_5 EVN チェーンである．

$$\langle H(s^2(x)), H(x)\rangle\langle H(s^2(x)), H(x)\rangle \cdots$$

$$H(s^4(0))\langle H(s^2(x)), H(x)\rangle\langle H(s^2(x)), H(x)\rangle$$

$H(x)$ と $H(s^2(x))$ は単一化可能であるので，無限に EVN チェーンがつながる．しかし，$H(s^4(0))$ からは 2 つまでしかつながらない．なぜなら，$\langle H(s^2(x)), H(x)\rangle$ の x には順に $s^2(0)$, 0 が入り，$H(0)$ からはつながらないからである． □

停止性を証明するために，次の概念を導入する．R を EV-TRS, t を項とする．t から始まる無限の EVN 系列が存在し，かつ t のすべての真部分項からは EV-SN であるとき，かつそのときに限り，t は $\rightharpoondown_R$ に関して**本質的**であるという．t からの

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \langle\, s_1,\ t_1 \,\rangle & & \langle\, s_2,\ t_2 \,\rangle & & \langle\, s_3,\ t_3 \,\rangle & \cdots \\
 & {\scriptstyle (\delta_1,\sigma_1) \in \mathtt{mgu}(s'_1, s_1)} \vdots\ \vdots & & {\scriptstyle (\delta_2,\sigma_2) \in \mathtt{mgu}(s'_2, s_2)} \vdots\ \vdots & & {\scriptstyle (\delta_3,\sigma_3) \in \mathtt{mgu}(s'_3, s_3)} \vdots\ \vdots & \\
\left(T(\overline{\mathcal{F}}) \ni \exists s_0 \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R}\right) s'_1 & t_1\sigma_1|_{\mathcal{V}ar(s_1)} & \overset{*}{\rightharpoonup}_R\ s'_2 & t_2\sigma_2|_{\mathcal{V}ar(s_2)} & \overset{*}{\rightharpoonup}_R\ s'_3 & t_3\,\sigma_3|_{\mathcal{V}ar(s_3)} & \overset{*}{\rightharpoonup}_R \cdots
\end{array}$$

図 1 (基礎) R EVN チェーン.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \langle\, F_1(\vec{w}_1),\ F_2(\vec{u}_2) \,\rangle & & \langle\, F_2(\vec{w}_2),\ F_3(\vec{u}_3) \,\rangle & & \langle\, F_3(\vec{w}_3),\ F_4(\vec{u}_4) \,\rangle & \cdots \\
 & {\scriptstyle (\delta_1,\sigma_1) \in \mathtt{mgu}(s'_1, l_1)} \vdots\ \vdots & & {\scriptstyle (\delta_2,\sigma_2) \in \mathtt{mgu}(s'_2, l_2)} \vdots\ \vdots & & {\scriptstyle (\delta_3,\sigma_3) \in \mathtt{mgu}(s'_3, l_3)} \vdots\ \vdots & \\
T(\overline{\mathcal{F}}) \ni F_1(\vec{u}_0) \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R} F_1(\vec{v}_1) & F_2(\vec{u}_2)\sigma_1|_{\mathcal{V}ar(l_1)} & \overset{*}{\rightharpoonup}_R\ F_2(\vec{v}_2) & F_3(\vec{u}_3)\sigma_2|_{\mathcal{V}ar(l_2)} & \overset{*}{\rightharpoonup}_R\ F_3(\vec{v}_3) & F_4(\vec{u}_4)\sigma_3|_{\mathcal{V}ar(l_3)} & \cdots
\end{array}$$

図 2 無限の基礎 EVN 系列から作られた無限の基礎 R EVN チェーン.

R による無限の EVN 系列が存在するならば，t の $\rightharpoonup_R$ に関して本質的な部分項が存在する．$s \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{p<}_{R} t$ ($s \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{p\leqq}_{R} t$) は，$s \equiv t$，または $p < q$ ($p \leqq q$) である q について $s \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{q}_{R} s' \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{p<(p\leqq)}_{R} t$ を意味する．また，$a_{i,1}, ..., a_{i,n_i}$ を $\vec{a}_i$ と略記する．

無限の R チェーンが存在しないことが R の停止性を保証する定理 [1] を，EVN チェーンに拡張すると，次のようになる．

［**定理** 4.7］ R を EV-TRS とする．無限の (基礎) R EVN チェーンが存在しないとき，かつそのときに限り，R は EV-(G)SN である．

［証明］ TRS の場合 [1] と同様に証明する．

$\Rightarrow$). 無限の基礎 EVN 系列から無限の基礎 R EVN チェーンを以下のように作る．

R が EV-GSN でないとすると，無限の基礎 EVN 系列が存在する．このとき，$\rightharpoonup_R$ に関して本質的な基礎項 s_0 が存在する．$s_0 \equiv f_1(\vec{u}_0)$ とすると，$f_1(\vec{u}_0) \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R} f_1(\vec{v}_1)(\equiv s'_1) \underset{\delta_1}{\rightharpoonup}{}^{[\varepsilon,\rho_1]}_{R} r_1\sigma_1 \rightharpoonup_R \cdots$ である．ここで，$\rho_1 : f_1(\vec{w}_1)(\equiv l_1) \to r_1 \in R$，$(\delta_1, \sigma_1) \in \mathtt{mgu}(l_1, s'_1)$ である．$v_{1,1}, ..., v_{1,n_1}$ はそれぞれ EV-SN であるので，$\sigma_1|_{\mathcal{V}ar(l_1)}$ の定義域の任意の変数 x について，$x\sigma_1$ は EV-SN である．よって，$t_1\sigma_1$ が本質的である r_1 の部分項 $t_1 \equiv f_2(\vec{u}_1)$ が存在する．$t_1\sigma_1$ は本質的であるので，s_0 と同様に，$t_1\sigma_1 \equiv f_2(\vec{u}_1\sigma_1) \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R} f_2(\vec{v}_2)(\equiv s'_2) \underset{\delta_2}{\rightharpoonup}{}^{[\varepsilon,\rho_2]}_{R} r_2\sigma_2 \rightharpoonup_R \cdots$，$\rho_2 : f_2(\vec{w}_2)(\equiv l_2) \to r_2 \in R$，$(\delta_2, \sigma_2) \in \mathtt{mgu}(l_2, s'_2)$ である．また，$\sigma_2|_{\mathcal{V}ar(l_2)}$ の定義域の任意の変数 x について，$x\sigma_2$ は EV-SN である．よって，$t_2\sigma_2$ が本質的である r_2 の部分項 $t_2 \equiv f_3(\vec{u}_2)$ が存在する．

ここで，規則 ρ_1, ρ_2 の存在より，依存対 $\langle F_1(\vec{w}_1), F_2(\vec{u}_2)\rangle$，$\langle F_2(\vec{w}_2), F_3(\vec{u}_3)\rangle$ ($\in \mathcal{DP}_R$) が存在する．$\langle F_1(\vec{w}_1), F_2(\vec{u}_2)\rangle$ の余剰変数に σ_1 を適用しても変数のままであるので，$u_{1,i}\sigma_1 \overset{*}{\rightharpoonup}_R v_{2,i}$ より，$u_{1,i}\sigma_1|_{\mathcal{V}ar(l_1)} \overset{*}{\rightharpoonup}_R v_{2,i}$ とみなしてもよい．よって，$u_{0,i} \overset{*}{\rightharpoonup}_R v_{1,i}$ かつ $(\delta_1, \sigma_1) \in \mathtt{mgu}(s'_1, l_1)$，$u_{1,i}\sigma_1|_{\mathcal{V}ar(l_1)} \overset{*}{\rightharpoonup}_R v_{2,i}$ かつ $(\delta_2, \sigma_2) \in \mathtt{mgu}(s'_2, l_2)$ より，$F_1(\vec{u}_0)\langle F_1(\vec{w}_1), F_2(\vec{u}_2)\rangle\langle F_2(\vec{w}_2), F_3(\vec{u}_3)\rangle$ は基礎 R EVN チェーンである．$f_3(\vec{u}_2\sigma_2)$ 以降についても同様に繰り返すことにより，図 2 の無限の基礎 R EVN チェーンを作ることができる．s_0 を $F_0(\vec{x}_0)$ とすれば，無限の EVN 系列から無限の R EVN チェーンを同様にして作ることができる．

$\Leftarrow$). 無限の基礎 R EVN チェーンから無限の基礎 EVN 系列を以下のように作る．

無限の基礎 R EVN チェーンを $F_1(\vec{u}_0)\langle F_1(\vec{w}_1), F_2(\vec{u}_2)\rangle\langle F_2(\vec{w}_2), F_3(\vec{u}_3)\rangle \cdots$ とすると，$F_{i+1}(\vec{u}_{i+1})\sigma_i|_{\mathcal{V}ar(F_i(\vec{w}_i))} \overset{*}{\rightharpoonup}_R F_{i+1}(\vec{v}_{i+1})$ かつ $(\delta_i, \sigma_i) \in \mathtt{mgu}(F_i(\vec{v}_i), F_i(\vec{w}_i))$ である．また，$\langle F_i(\vec{w}_i), F_{i+1}(\vec{u}_{i+1})\rangle \in \mathcal{DP}_R$ より，$\rho_i : f_i(\vec{w}_i) \to C_i[f_{i+1}(\vec{u}_{i+1})] \in R$ である．さらに，$f_1(\vec{u}_0) \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R} s'_1$ かつ $(\delta_1, \sigma_1) \in \mathtt{mgu}(s'_1, F_1(\vec{w}_1))$ を満たす s'_1 が存在するので，$f_1(\vec{u}_0) \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R} F_1(\vec{u}_1) \equiv s'_1$ である．よって，無限の基礎 EVN 系列 $f_1(\vec{u}_0) \overset{*}{\rightharpoonup}_R f_1(\vec{v}_1) \underset{\delta_1}{\rightharpoonup}{}^{[\varepsilon,\rho_1]}_{R} C_1\delta_1[f_2(\vec{u}_1)]_{p_1} \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{p_1<}_{R} C_1\delta_1[f_2(\vec{v}_2)] \underset{\delta_2}{\rightharpoonup}{}^{[p_1,\rho_2]}_{R} C_1\delta_1[C_2\delta_2[f_3(\vec{u}_2)\sigma_2]_{p_2}]_{p_1} \rightharpoonup_R \cdots$ が作られる．$F_1(\vec{u}_0)$ を $F_1(\vec{x}_1)$ とすれば，無限の R EVN チェーンから無限の EVN 系列を同様にして作ることができる． □

4.2 切り落とし関数と EVN チェーン

TRS における停止性証明では，無限の R チェーンが存在しないことを保証する擬順序を発見することで停止性を証明できた．しかし，これを EV-TRS 上に拡張する際の問題点の 1 つとして，余剰変数が存在するために，余剰変数を持つ規則 $l \to r \in R$ や依存対 $\langle s, t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ に対して $l \succsim r$, $s \succ t$ となるような書換え順序は存在しないという問題がある．そこで，TRS の停止性証明に用いられる切り落とし関数 [1], [7] を利用する．

［**定義** 4.8］ 関数記号の集合を $\mathcal{F}$ とする．任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}$ ($arity(f) = n \geqq 0$) について $\pi(f)$ が次のどちらかで定義される関数 π を**切り落とし関数**と呼ぶ．

- $\pi(f) = i$ ($1 \leqq i \leqq n$).
- $\pi(f) = [i_1, ..., i_m]$ ($0 \leqq m \leqq n, 1 \leqq i_j \leqq n$).

$\pi(f)$ が定義されていないときは，$\pi(f) = [1, ..., n]$ とみなす．また，R の任意の被定義記号 $f \in \mathcal{D}_R$ について，$\pi(f) \neq i$ (すなわち，$\pi(f) = [i_1, ..., i_m]$) とする．キャピタル記号についても同様である．π は項に対する関数として，次のように自然に拡張される．

- $\pi(x) = x$．(ただし，$x \in \mathcal{X}$．)
- $\pi(f(t_1, ..., t_n)) = \pi(t_i)$．(ただし，$\pi(f) = i$．)
- $\pi(f(t_1, ..., t_n)) = f(\pi(t_{i_1}), ..., \pi(t_{i_m}))$．

(ただし，$\pi(f) = [i_1, ..., i_m]$．)

さらに，EV-TRS R，依存対 $\mathcal{DP}_R$ に対する関数として，次のように拡張される．

- $\pi(R) = \{\, \pi(l) \to \pi(r) \mid l \to r \in R \,\}$.

$$
\begin{array}{llllll}
 & \langle\, \pi(s_1),\ \pi(t_1)\,\rangle & & \langle\, \pi(s_2),\ \pi(t_2)\,\rangle & & \langle\, \pi(s_3),\ \pi(t_3)\,\rangle \quad \cdots \\
 & {\scriptstyle (\theta_1,\sigma_1) \in \mathtt{mgu}(s'_1,\pi(s_1))} \vdots \ \vdots & & {\scriptstyle (\theta_2,\sigma_2) \in \mathtt{mgu}(s'_2,\pi(s_2))} \vdots \ \vdots & & {\scriptstyle (\theta_3,\sigma_3) \in \mathtt{mgu}(s'_3,\pi(s_3))} \vdots \ \vdots \\
\left(T(\overline{\mathcal{F}}_\pi) \ni \exists s_0 \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R}\right) & s'_1 \quad \pi(t_1)\sigma_1|_{\mathcal{V}ar(\pi(s_1))} & \overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} & s'_2 \quad \pi(t_2)\sigma_2|_{\mathcal{V}ar(\pi(s_2))} & \overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} & s'_3 \quad \pi(t_3)\,\sigma_3|_{\mathcal{V}ar(\pi(s_3))} \overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} \cdots
\end{array}
$$

図 3　(基礎) $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーン.

- $\pi(\mathcal{DP}_R) = \{\, \langle \pi(s), \pi(t)\rangle \mid \langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R \,\}$. □

規則や依存対に余剰変数が残ってしまう切り落とし関数では，やはり $\pi(l) \geqq \pi(r)$, $\pi(s) > \pi(t)$ を満たす順序はない．よって，すべての $l \to r \in R$, $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ について $\mathcal{V}ar(\pi(l)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(r))$, $\mathcal{V}ar(\pi(s)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(t))$ を満たすような切り落とし関数が必要となる．任意の $l \to r \in R$, $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ についてそれぞれ $\mathcal{V}ar(\pi(l)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(r))$, $\mathcal{V}ar(\pi(s)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(t))$ を満たすとき，切り落とし関数 π は R, $\mathcal{DP}_R$ の**余剰変数を切り落とす**という．

切り落とし関数 π について，定義 4.5 の $R, \mathcal{DP}_R$ をそれぞれ $\pi(R), \pi(\mathcal{DP}_R)$ に置き換えて得られる (基礎)EVN チェーンを (基礎) $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンと呼ぶ (図 3)．ここで，$\mathcal{F}_\pi$ は，切り落とし関数 π によって引数が変化した $\mathcal{F}$ の関数記号の集合であり，任意の $f \in \mathcal{F}_\pi$ ($\pi(f) = [i_1, ..., i_m]$) について $arity(f) = m$ とする．

EV-TRS R とその依存対の余剰変数を切り落とす π を $R, \mathcal{DP}_R$ に適用すると，すべての基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンには変数が現れなくなる．このとき，基礎項から始まる $\overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)}$ による EVN 系列は $\overset{*}{\to}_{\pi(R)}$ による書換え系列でもあるので，基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンは $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ チェーンでもある．$\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ チェーンとは，R チェーンに π を適用したチェーン，すなわち，$\pi(R)$ と $\pi(\mathcal{DP}_R)$ により構成されるチェーンである．$\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ チェーンについては，無限のチェーンが存在するかどうかを TRS と同様の方法 [1] で調べることができる．切り落とし関数 π，代入 θ に対して，代入 θ_π を $\{\, x \mapsto \pi(t) \mid x \in \mathcal{D}om(\theta), x\theta \equiv t \,\}$ と定義する．次の命題は明らかに成り立つ．

［**命題** 4.9］ π を切り落とし関数，t を項，θ を代入とする．このとき，$\pi(t\theta) \equiv \pi(t)\theta_\pi$ である． □

［**補題** 4.10］ R を EV-TRS, π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とす切り落とし関数とする．$s \overset{*}{\rightharpoonup}_R t$ かつ $\pi(s)$ が基礎項ならば，$\pi(s) \overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} \pi(t)$ である．

［証明］ $s \overset{n}{\rightharpoonup}_R t$ の n に関する帰納法により証明する．$n = 0$ のときは明らか．$s \underset{\delta}{\rightharpoonup}{}^{[p,\rho]}_{R}\, u \overset{n-1}{\rightharpoonup}_R t$ かつ $\pi(s)$ を基礎項とすると，$s \equiv C[s']_p$, $\rho: l \to r \in R$, $(\delta,\sigma) \in \mathtt{mgu}(s', l)$, $u \equiv C\delta[r\sigma]$ である．ここで，$\pi(C)$ で場合分けする．

- C の □ が切り落とされるとき，$\pi(C) \equiv u'$ とすると，$\pi(s) \equiv u'$, $\pi(u) \equiv \pi(C\delta) \equiv \pi(C)\delta_\pi \equiv u'\delta_\pi$ である．$\pi(s)$ が基礎項より u' に変数はないので，$\pi(u) \equiv u'\delta_\pi \equiv u'$．よって，帰納法の仮定より，$\pi(u) \overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} \pi(t)$ である．したがって，$\pi(s) \equiv \pi(u) \overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} \pi(t)$.
- それ以外のとき，$\pi(C) \equiv C'$ とおくと，$\pi(s) \equiv C'[\pi(s)]$, $\pi(u) \equiv C'\delta_\pi[\pi(r\sigma)]$ である．$\pi(s)$ が基礎項より C' に変数はないので，$\pi(u) \equiv C'[\pi(r\sigma)]$．さらに，$\pi(l) \to \pi(r) \in \pi(R)$ かつ $\mathcal{V}ar(\pi(l)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(r))$ より，$\pi(r\sigma)$ に変数はない．よって，帰納法の仮定より，$\pi(u) \overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} \pi(t)$．また，$s'\delta \equiv l\sigma$, $\pi(s'\delta) \equiv \pi(s')\delta_\pi$, $\pi(l\sigma) \equiv \pi(l)\sigma_\pi$ より，$\pi(s')\delta_\pi \equiv \pi(l)\sigma_\pi$．$\pi(s')$ は基礎項であるので，$\pi(s')\delta_\pi \equiv \pi(s') \equiv \pi(l)\sigma_\pi$ である．したがって，$\pi(s) \equiv C'[\pi(s')] \equiv C'[\pi(l)\sigma_\pi] \underset{\emptyset}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} C'[\pi(r)\sigma_\pi] \equiv C'[\pi(r\sigma)] \equiv \pi(u) \overset{*}{\rightharpoonup}_{\pi(R)} \pi(t)$. □

この補題を利用して次の定理が導かれる．

［**定理** 4.11］ R を EV-TRS, π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とす切り落とし関数とする．このとき，無限の基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンが存在しないならば，無限の基礎 R EVN チェーンが存在しない．

［証明］ 無限の基礎 R EVN チェーンから無限の基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンを作ることにより示す．無限の基礎 R EVN チェーンを $s_0\langle s_1,t_1\rangle\langle s_2,t_2\rangle \cdots$ とすると，$s_0 \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R} s'_1$, $(\delta_1,\sigma_1) \in \mathtt{mgu}(s'_1, s_1)$, かつ $t_i\sigma_i|_{\mathcal{V}ar(s_i)} \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{R} s'_{i+1}$, $(\delta_{i+1},\sigma_{i+1}) \in \mathtt{mgu}(s'_{i+1}, s_{i+1})$ ($i \geqq 1$) である (図 1).

s_0 は基礎項であるので $\pi(s_0)$ も基礎項である．また，すべての規則 $\pi(l) \to \pi(r) \in \pi(R)$ について，$\mathcal{V}ar(\pi(l)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(r))$ である．よって，補題 4.10 より，$\pi(s_0) \overset{*}{\rightharpoonup}{}^{\varepsilon<}_{\pi(R)} \pi(s'_1)$ かつ $\pi(s'_1)$ は基礎項である．$s'_1\delta_1 \equiv s_1\sigma_1$ より，$\pi(s'_1) \equiv \pi(s_1)\sigma_{1\pi}$．したがって，$\pi(s_0)\langle\pi(s_1),\pi(t_1)\rangle$ は基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンである．$\mathcal{V}ar(\pi(s_1)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(t_1))$ であるので，$\pi(t_1)\sigma_{1\pi}|_{\mathcal{V}ar(\pi(s_1))}$ も基礎項である．よって，$\langle s_1,t_1\rangle$ 以降についても同様にして $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンを作ることができる．したがって，無限の基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーン $\pi(s_0)\langle\pi(s_1),\pi(t_1)\rangle\langle\pi(s_2),\pi(t_2)\rangle\cdots$ が作られる． □

また，基礎項上では $\to_R \;=\; \rightharpoonup_R$ であるので，明らかに次の命題が成り立つ．

［**命題** 4.12］ R を EV-TRS, π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とす切り落とし関数とする．このとき，基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンは $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ チェーンである． □

上の命題より，次の定理が成り立つ．

［**定理** 4.13］ R を EV-TRS, π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とす切り落とし関数とする．無限の $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ チェーンが存在しないとき，無限の基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンが存在しない． □

［**例** 4.14］ 例 4.4 の R_5 と依存対 $\mathcal{DP}_{R_5}$ を考える．切り落とし関数 π_5 を c の引数を切り落とす関数，$\pi_5(c) = [\,]$ とする．このとき，π_5 を $R_5, \mathcal{DP}_{R_5}$ に適用すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\pi_5(R_5) = \{\, & half(0) \to 0,\quad half(s^2(x)) \to s(half(x)), \\
& a \to half(c) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}
\end{aligned}
$$
$$
\pi_5(\mathcal{DP}_{R_5}) = \{\, \langle H(s^2(x)), H(x)\rangle,\ \langle A, H(c)\rangle \,\}
$$

$A > H$ とすれば，$half(0) \geqq 0$, $half(s^2(x)) \geqq s(half(x))$,

$a \geqq half(c)$, $H(s^2(x)) > H(x)$, $A > H(c)$ であるので，無限の $\pi_5(R_5)\cdot\pi_5(\mathcal{DP}_{R_5})$ チェーンは存在しない．よって，無限の基礎 R_5 EVN チェーンも存在しないので，R_5 は EV-GSN である． □

EVN チェーンは基礎 EVN チェーンの先頭の項 s'_1 がより一般的な項 $(F(x_1,...,x_n))$ である場合である．図 1 の R EVN チェーンを考える．π が R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とすとすると，最汎単一化子 $(\delta'_1, \sigma'_1) \in \mathtt{mgu}(\pi(s'_1), \pi(s_1))$ について $\pi(t_1)\sigma'_1$ が基礎項であれば，$\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーン $\langle\pi(s_2),\pi(t_2)\rangle\langle\pi(s_3),\pi(t_3)\rangle\cdots$ は基礎 EVN チェーンとなり，これは $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ チェーンでもある．よって，再び TRS と同様の手法が利用できる．この条件は「任意の依存対 $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ (ただし，$top(s) = F$) とその最汎単一化子 $(\delta,\sigma) \in \mathtt{mgu}(\pi(F(x_1,...,x_n)),\pi(s))$ について，$\pi(t)\sigma$ が基礎項である」だが，明らかな十分条件は「任意の依存対 $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ について，$\pi(t)$ が基礎項である」である．π が満たしている上の性質と定理 4.11 より，次の定理が明らかに成り立つ．

[**定理** 4.15] R を EV-TRS, π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とし，さらに，任意の依存対 $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ について $\pi(t)$ が基礎項となる切り落とし関数とする．このとき，無限の基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンが存在しないならば，無限の R EVN チェーンが存在しない． □

さらに，依存グラフ [1] を使うなら，すべての $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ について $\pi(t)$ が基礎項である必要はなく，すべてのループについて少なくとも 1 つの $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ の $\pi(t)$ が基礎項であるとすれば十分である．

基礎項上では $\to_R = \rightharpoonup_R$ であるので，上の条件のもとでは，無限の基礎 $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンが存在しないとき，かつそのときに限り，無限の $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ EVN チェーンは存在しない．以上をまとめると，次の定理になる．

[**定理** 4.16] R を EV-TRS, π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とす切り落とし関数とする．無限の $\pi(R)\cdot\pi(\mathcal{DP}_R)$ チェーンが存在しないならば，R は EV-GSN である．さらに，任意の依存対 $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}_R$ について $\pi(t)$ が基礎項であるならば，R は EV-SN である． □

すべての $F \in \overline{\mathcal{D}}_R$ について $\pi(F) = [\,]$ とおいて定理 4.16 を適用すれば，文献 [11] で示した EV-SN の判定方法と同様になる．よって，定理 4.16 は [11] の結果を含む．また，TRS R が EV-SN であることと R のナローイングが停止することは等価であることは，定義より明らかである．よって，定理 4.16 は TRS のナローイングが停止するかを証明することにも利用できる．

R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とす π は次の手順で作ることができる．EV-GSN の証明のためには下の (1)，(2) を EV-SN のためには (1)〜(4) を繰り返す．

（1） すべての規則と依存対の右辺の余剰変数を切り落とすように π を決める．

（2） (1) で決めた π を規則，依存対に適用する．

（3） すべての依存対の右辺の変数を切り落とすように π を決める．

（4） (3) で決めた π を規則，依存対に適用する．

π は一意には決まらないので，様々な π を試す必要がある．うまく定理 4.16 が成り立つ π を発見できればよい．

[**例** 4.17] 例 4.4 の R_5 と依存対 $\mathcal{DP}_{R_5}$ を考える．切り落とし関数 π'_5 を $\pi'_5(s) = \pi'_5(c) = \pi'_5(H) = [\,]$ とする．このとき，π'_5 を $R_5, \mathcal{DP}_{R_5}$ に適用すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\pi'_5(R_5) &= \{\, half(0) \to 0, \quad half(s) \to s, \\ &\qquad a \to half(c) \qquad\qquad\qquad \} \\ \pi'_5(\mathcal{DP}_{R_5}) &= \{\, \langle H, H\rangle, \langle A, H\rangle \,\}\end{aligned}$$

π'_5 は定理 4.19 の条件を満たす．このとき，明らかに無限の基礎 $\pi'_5(R_5)\cdot\pi'_5(\mathcal{DP}_{R_5})$ EVN チェーンが存在する．よって，R_5 が EV-SN であるとはいえない．実際，例 4.14 で示したように R_5 は EV-GSN であるにもかかわらず，$half(x)$ からの無限の EVN 系列が存在するので EV-SN ではない． □

次に，上の定理 4.16 に比べて，EV-(G)SN であることを判定できる範囲は狭くなるが，より簡単に EV-(G)SN であるか判定する方法を示す．それは，EV-TRS R の余剰変数を切り落とす π によって得られる TRS $\pi(R)$ の停止性を調べる方法である．下の命題は明らかに成り立ち，それにより定理 4.16 に相当する定理 4.19 が得られる．

[**命題** 4.18] R を $\mathcal{F}$ 上の EV-TRS, π を切り落とし関数とする．すべての被定義記号 $f \in \mathcal{D}_R$ とそのキャピタル記号 $F \in \overline{\mathcal{D}}_R$ について $\pi(f) = \pi(F)$ を満たすならば，$\pi(\mathcal{DP}_R) = \mathcal{DP}_{\pi(R)}$ である． □

[**定理** 4.19] R を $\mathcal{F}$ 上の EV-TRS, π を R と $\mathcal{DP}_R$ の余剰変数を切り落とし，すべての被定義記号 $f \in \mathcal{D}_R$ とそのキャピタル記号 $F \in \overline{\mathcal{D}}_R$ について $\pi(f) = \pi(F)$ を満たす切り落とし関数とする．$\pi(R)$ が SN ならば，R は EV-GSN である．さらに，任意の規則 $l \to r \in R$ について先頭が被定義記号である $\pi(r)$ のすべての部分項が基礎項である $(\forall u \trianglelefteq \pi(r), top(u) \in \overline{\mathcal{D}}_R \Rightarrow u \in T(\overline{\mathcal{F}}))$ ならば，R は EV-SN である． □

[**例** 4.20] 例 4.14 の $R_5, \mathcal{DP}_{R_5}, \pi_5$ を考える．$\pi_5(\mathcal{DP}_{R_5}) = \mathcal{DP}_{\pi_5(R_5)}$ であるので，R_5 が EV-GSN であるかの判定には，TRS $\pi_5(R_5)$ の停止性を調べてもよい． □

4.3 近似による EV-GSN クラスの拡張

定理 4.16 を直接適用して EV ナローイングの停止性を証明できないが，近似 EV-TRS の EV ナローイングが停止することを示すことにより，EV-(G)SN であることを示すことができる EV-TRS が存在する．例えば，次の EV-TRS を考える．

$$\begin{aligned}R_6 = \{\, & a \to g(y), & & g(0) \to 0, \\ & g(s^2(x)) \to g(0), & & g(x) \to s(0) \,\}\end{aligned}$$

R_6 は明らかに EV-SN であるが，これまでに述べてきた余剰変数を切り落とす方法では EV-SN を証明できない．この他にも，余剰変数を切り落とす際に崩壊規則の右辺が余剰変数になってしまいうまく証明できなくなる場合もある．例 2.1 の R_3 はその例である．f のすべての引数を切り落とすと，$f(x,0) \to x$ の右辺 x が余剰変数になってしまい，EV-SN であることが証

明できなくなる．

本小節では，EV-(G)SN であることを証明しやすくするための EV-TRS の近似法を提案する．EV-TRS R の具体的な近似方法は，次の通りである．

（1） R の各規則を左線形な規則で近似する．具体的には，左辺の非線形な変数を順に新しい変数に置き換え，右辺の変数は新しく導入した変数のうちで左辺の切り落とされるポジションにないものに置き換える．(すべて切り落とされるポジションにある場合はどれでもよい．)

（2） 任意の EV ナローイングを行っても絶えず変数そのものとして残るか，EVN 代入により基礎項になるか，もしくは EVN 代入により変数の含む項になったが直後にその変数が消えるような余剰変数を，それらの項の変数に $\mathcal{F}$ にない構成子 $\triangle$ を代入して得られる基礎項で置き換えた規則を追加する．(元の規則は取り除く．)

崩壊規則の右辺の変数についても余剰変数と同様に扱う．

R_6 を上の方法で近似すると次の TRS が得られる．

$$
\begin{aligned}
R_{6\triangle} = \{\ & a \to g(\triangle), & & a \to g(s^2(\triangle)), \\
& a \to g(0), & & g(0) \to 0, \\
& g(s^2(x)) \to g(0), & & g(x) \to s(0) \quad \}
\end{aligned}
$$

$\pi_6(s) = [\,]$ とすれば，$R_{6\triangle}$ と π_6 は定理 4.16 の条件を満たすので，R_6 は EV-SN である．また，R_3 の余剰変数を切り落として得られる $R'_3 = \{\, f(x) \to x,\ g(x) \to f(x) \,\}$ の $f(x) \to x$ の右辺の x に注目すると，この変数は f, g の引数と照合しても変数のままであることがわかるので，$\triangle$ で置き換えてもよい．よって，$R'_{3\triangle} = \{\, f(x) \to \triangle,\ g(x) \to f(x,y) \,\}$ と近似できて，$\pi_3(f) = \pi_3(g) = [\,]$ とすると，定理 4.16 の条件を満たすので，R_3 は EV-SN であることが証明できる．

5. ま と め

本稿では，文献 [11] で提案した EV ナローイングについて,, 依存対による TRS の停止性証明を EV ナローイングに拡張し，EV ナローイングの停止性を判定する指針を明らかにした．

1. 節で紹介した EV-TRS R_2 は $u_2(\times^{\#}(0))$ からの無限の基礎 EVN 系列 $u_2(\times^{\#}(0)) \overset{*}{\rightharpoonup}_{R_2} u_3(u_2(u_1(+^{\#}(y))), 0) \rightharpoonup_{R_2} \cdots \rightharpoonup_{R_2} u_3(u_2(u_1(\cdots u_1(+^{\#}(z))\cdots), 0) \rightharpoonup_{R_2} \cdots$ が存在するため EV-GSN ではないが，$+^{\#}(s^n(0))$ と $\times^{\#}(s^n(0))$ は R_2 に関して EV-SN である．これは n に関する帰納法を用いて証明できる．加算と乗算の逆計算を行うためには $+^{\#}(s^n(0))$ と $\times^{\#}(s^n(0))$ が求まれば十分であるので，これらの計算は EV ナローイングにより計算機で実行できる．このように，EV-TRS が EV-GSN でなくとも基礎項が EV-SN である場合に，それを証明するための一般的な手法を考案することが今後の課題である．また，EV ナローイングを条件付き項書換え系へ拡張したい．

謝　　辞

本研究は，一部，文部省科学研究費基盤 (c)11680352，21 世紀 COE，柏森情報科学振興財団の補助を受けている．

文　　献

[1] Arts,T. and Giesl,J.: Termination of Term Rewriting Using Dependency Pairs. Theoretical Computer Science, vol.236, pp.133–178, 2000.

[2] Baader,F. and Nipkow,T.: *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[3] Fay,M.: First-order Unification in an Equational Theory. In Proceedings of the 4th Workshop on Automated Deduction, pp.161–167, Austin, Texas, 1979.

[4] Huet,G. and Lèvy,J.-J.: Computations in Orthogonal Rewriting Systems, I. In J.-L. Lassez and G. Plotkin, editors, Computational Logic: Essays in Honor of Alan Robinson, pp.395–414, MIT Press, Cambridge, 1991.

[5] Hullot,J.M.: Canonical Forms and Unification. LNCS 87, pp.318–334, 1980.

[6] Klop,J.W.: Term Rewriting Systems. *Handbook of Logic in Computer Science*, vol.2, pp.2–116. Oxford University Press, 1992.

[7] Kusakari,K., Nakamura,M. and Toyama,Y.: Argument Filtering Transformation. LNCS 1702 (PPDP'99), pp.47–61, 1999.

[8] Middeldorp,A. and Hamoen,E.: Completeness Results for Basic Narrowing. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol.5, pp.213–253, 1994.

[9] Slagle,J.R.: Automated Theorem Proving for Theories with Simplifiers, Commutativity and Associativity. *J.ACM*, vol.21, pp.622–642, 1974.

[10] 西田, 酒井, 坂部: 指定した引数を固定した逆関数を定義する TRS の生成. 電子情報通信学会技術研究報告, COMP 2001-67, pp.33–40, 2001.

[11] 西田, 酒井, 坂部: 右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系の計算モデル. 日本ソフトウェア科学会第 19 回大会論文集, 2002.