右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系のナローイングに基づく書換え

西田 直樹　酒井 正彦　坂部 俊樹　（名古屋大学大学院工学研究科）

1　はじめに

右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系 (EV-TRS) は，その変数に任意の項を代入して書き換えられるので，書換え関係が無限分岐となる．そのため，EV-TRS は一般に計算モデルとして認められていない．本研究では，ナローイング [2] を EV-TRS 上のナローイングに自然に拡張し，これが EV-TRS の書換え関係をシミュレーションすること，すなわち，EV-TRS のモデルになることを示す．

2　項書換え系と書換え関係

項書換え系の一般的な記法については [1] に従う．関数記号の集合 F と変数の集合 X からなる項の集合を $T(F,X)$ と書く．$\square$ を特別な定数とする．$C \in T(F \cup \{\square\}, X)$ を文脈と呼び，$C[t_1,...,t_n]$ は C 中の $\square$ を左から順に $t_1,...,t_n$ に置き換えて得られる項である．代入の集合を $\mathcal{S}ub$ で表す．代入 σ の定義域は $\mathcal{D}om(\sigma)$ で表す．代入 σ,δ の合成は $x\sigma\delta \equiv (\sigma(x))\delta$ で定義され，これを $\sigma\delta$ と書く．代入 σ,σ' に対し $\exists\theta \in \mathcal{S}ub, \forall x \in \mathcal{D}om(\sigma), x\sigma\theta \equiv x\sigma'$ のとき，$\sigma \lesssim \sigma'$ と書く．2 つの項 s,t に対して $s\sigma \equiv t\sigma'$ を満たす代入の組 (σ,σ') を s と t の単一化子と呼ぶ．また，s と t のすべての単一化子 (θ,θ') に対して，$\sigma \lesssim \theta$, $\sigma' \lesssim \theta'$ を満たす s と t の単一化子 (σ,σ') を最汎単一化子と呼び，$(\sigma,\sigma') \in \mathtt{mgu}(s,t)$ と書く．**項書換え系** (TRS) は，$l \to r$ の形式をした書換え規則の集合である．l,r はそれぞれ規則の左辺，右辺と呼ばれる項である．すべての規則の右辺が線形であるとき，その TRS は**右線形**であると言う．規則にはラベル ρ を付けて $\rho : l \to r$ と書くこともある．TRS R の**書換え関係**は，$\to_R\ = \{\, (C[l\sigma], C[r\sigma]) \mid l \to r \in R \,\}$ と定義される．規則 ρ の右辺にのみ現れる変数を**余剰変数**と呼び，その集合を $\mathcal{EV}ar(\rho)$ と書く．余剰変数を持つ書換え規則が存在する項書換え系を **EV-TRS** と呼ぶ．

例 1 $R_1 = \{\, \rho_1 : f(x,0) \to x,\ \rho_2 : g(x) \to f(x,y) \,\}$ は EV-TRS である．項 $g(0)$ は，規則 ρ_2 により，$f(0,0), f(0,s(g(s(0)))),...$ など，$f(0,t)$ の形 (t は任意の項) をしたどの項にも書き換えることができる．すなわち，$\to_{R_1}$ は無限分岐である．　$\square$

3　EV ナローイング

例 1 の R_1 による $g(0)$ で始まる書換え系列を考える．$g(0)$ から 1 ステップ書き換えて到達できる無限個の項を，任意の項を表す t で代表させて $f(0,t)$ と表現できる．よって，$g(0)$ からの 1 ステップの書換えは無限通りであるにもかかわらず，$g(0) \to_{R_1} f(0,t)$ と書ける．さらに $f(0,t)$ は，$t \equiv 0$ の場合にのみ 0 に書き換えられるが，t は 0 に適合できないため不都合が生じる．そこで，t の代わりに変数を用いて，規則の適合の際にその変数に代入を許すことにより，次のような書換え系列が可能になるような書換え手法を提案する．

$$g(0) \rightharpoonup_{R_1} f(0,y) \underset{\{y \mapsto 0\}}{\rightharpoonup}_{R_1} 0$$

この系列において，余剰変数から生じる y を**順応変数**と呼ぶ．このような書換えは，ナローイング [2] の EV-TRS への自然な拡張になっているので，これを **EV ナローイング**と呼ぶ．EV ナローイングは次のように定義される．

- 余剰変数にはそれまでの系列上に現れていない変数を代入する．
- 変数は任意の項とみなして規則を適用して書き換える．その際，適合した規則の左辺との最汎単一化子により代入を行う．

以上を満たすように，EV ナローイングを形式化する．

定義 1 TRS R の EV ナローイング $\rightharpoonup_R$ を次のように定義する．

$$\rightharpoonup_R\ = \{\, (C[t], C\delta[r\sigma]) \mid \rho : l \to r \in R, t \notin X, (\delta,\sigma) = \mathtt{mgu}(t,l),$$
$$\text{任意の } x \in \mathcal{EV}ar(\rho) \text{ について}$$
$$x\sigma \text{ は } C[t] \text{ 中に現れない新しい変数.} \,\}$$

δ の元で項 s が項 t に書き換えられるとき $s \underset{\delta}{\rightharpoonup}_R t$ と書く．また，δ は省略してもよい．$n+1$ ステップの EV ナローイングは $\overset{n+1}{\underset{\delta'\delta}{\rightharpoonup}}_R = \overset{n}{\underset{\delta'}{\rightharpoonup}}_R \underset{\delta}{\rightharpoonup}_R$ で定義され，推移反射閉包を $\overset{*}{\underset{\delta}{\rightharpoonup}}_R$ と書く．　$\square$

次の定理 1, 2 は EV ナローイングの完全性を，定理 3 はその健全性をそれぞれ保証していて，書換え関係 $\to_R$ をシミュレーションできることを意味する．

定理 1 任意の項 $s,t \in T(F,\emptyset)$ について，$s \overset{*}{\to}_R t$ かつ余剰変数に代入された項以下では書換えが起こらないならば $s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightharpoonup}}_R t'$ かつ $t \equiv t'\delta'$ となる t' と δ' が存在する．　$\square$

定理 2 R を右線形な EV-TRS とする．任意の項 $s,t \in T(F,\emptyset)$ について，$s \overset{*}{\to}_R t$ ならば $s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightharpoonup}}_R t'$ かつ $t \equiv t'\delta'$ となる t' と δ' が存在する．　$\square$

定理 3 任意の $s,t \in T(F,X)$ に対し，$s \overset{*}{\underset{\delta}{\rightharpoonup}}_R t$ ならば $s\delta \overset{*}{\to}_R t$．　$\square$

一般の書換え $\to_R$ では変数を含む項も対象としているが，書換え系列上に現れる変数は定数とみなしても差し支えない．よって，定理 1,2 は $\to_R$ について変数のない項を考えるだけで十分である．

次の定理は，EV ナローイングが EV-TRS の計算モデルであることを示す．

定理 4 TRS R が有限ならば，$\rightharpoonup_R$ は有限分岐．　$\square$

定理 5 TRS R が EV-TRS でないならば，$\to_R\ =\ \rightharpoonup_R$．　$\square$

上の定理より，EV ナローイングは $\to_R$ の拡張であると言える．

今後の課題

今後の課題として，EV ナローイングの停止性について議論する必要がある．

参考文献

[1] Baader,F. and Nipkow,T.: *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[2] Slagle,J.R.: Automated Theorem Proving for Theories with Simplifiers, Commutativity and Associativity. *J.ACM*, Vol.21, pp.622–642, 1974.