社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

ナローイング計算の停止性証明のための依存グラフ法

三浦 浩一† 西田 直樹†† 酒井 正彦†† 草刈 圭一朗†† 坂部 俊樹††

†,†† 名古屋大学大学院情報科学研究科
〒 464-8603 名古屋市千種区不老町
E-mail: †miura@trs.cm.is.nagoya-u.ac.jp, ††{nishida,sakai,kusakari,sakabe}@is.nagoya-u.ac.jp

あらまし 項書換え系（TRS）を右辺のみに現れる変数を持つ書換え規則を含むように拡張した余剰変数付き項書換え系（EV-TRS）は逆計算プログラムなどを表現でき，その書換え計算は基礎項からのナローイングによって模倣できる．本稿では，項書換え系の停止性証明手法である依存グラフ法が，構成子 EV-TRS などのクラスを対象とした基礎項からのナローイング計算の停止性証明に利用できることを示す．本手法では，切り落とし関数が全ての余剰変数を削除しているという条件が追加される．さらに，ナローイング計算の停止性を保証するための追加条件も示す．

キーワード 項書換え系，余剰変数，依存対，切り落とし関数

Dependency Graph Method for Proving Termination of Narrowing

Koichi MIURA†, Naoki NISHIDA††, Masahiko SAKAI††,
Keiichiro KUSAKARI††, and Toshiki SAKABE††

†,†† Graduate School of Information Science, Nagoya University
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8603 Japan
E-mail: †miura@trs.cm.is.nagoya-u.ac.jp, ††{nishida,sakai,kusakari,sakabe}@is.nagoya-u.ac.jp

Abstract Term rewriting systems with extra variables (called EV-TRSs) has an ability to represent inverse-computation programs, and the rewrite sequences of EV-TRSs are simulated as narrowing sequences starting from ground terms. In this paper, we show that the ordinary dependency graph method for proving termination of TRSs works also for constructor EV-TRSs and so on, to prove termination of narrowing which starts from ground terms, by imposing argument filterings to eliminate all extra variables in every dependency pairs. We also give an additional condition to prove termination of the ordinary narrowing.

Key words term rewriting system, extra variable, dependency pair, argument filtering

1. はじめに

与えられた項書換え系（TRS）の逆計算を行うプログラムを生成すると，一般に右辺のみに現れる変数（余剰変数）を持つ書換え規則を含む余剰変数付き項書換え系（EV-TRS）になる [11, 15]．余剰変数には任意の項が代入できるため，無限分岐と非停止性を引き起こし，逆計算などではそのままの書換え計算では解を得られない．しかし，EV-TRS の書換えは基礎項からのナローイングによって有限分岐で模倣できることが示されている [14]．基礎項からの書換え系列のうち，余剰変数に代入された項がそれ以降で書換えられていない系列，または右線形 EV-TRS による書換え系列に対して，模倣手法は完全である．逆計算の解を求める上では，前者の条件を満たす系列を考えるだけで十分であるため，ナローイングによる模倣は有効である [15]．基礎項からのナローイングが停止する場合は，有限空間で全解探索も可能となる．

基礎項からのナローイングでは，対象項の中の変数は余剰変数に起因するもののみであるため，余剰変数を持たない場合には書換えと等価である．よって，ナローイングがほとんどの場合に停止性を持たないのに対し，基礎項からのナローイングは停止性（基礎項停止性）を持つ場合も多い．逆計算の例では，EV-TRS 上のナローイングの基礎項停止性を証明することで逆計算の停止性を示せる．

ナローイングの（基礎項）停止性の十分条件はこれまでにいくつか示されている [3,10,14]（4 節参照）．文献 [3] では，左辺が平滑である TRS という特殊なクラスを対象とした停止性証明法が示されている．一方，文献 [14] では EV-TRS の被定義記号の呼び出し関係に基づく停止性の十分条件，文献 [10] では

依存対を用いた EV-TRS 上のナローイングの停止性の証明法が示されている．前者では，関数記号の引数を全て削除しており条件が強いため，証明できる TRS の数は限られている．後者では，切り落とし関数に単純性という制約があり，TRS の依存対法をそのまま利用することができない．

本稿では，TRS の停止性証明の手法である依存グラフ法がナローイングの基礎項停止性の証明法として利用できることを示す．なお，本手法が適用できるクラスは，ナローイングが TRAT 性を持つクラスに限られているが，そのようなクラスには構成子 EV-TRS が含まれるので，一階の関数型プログラムに対して適用できる．本手法でも，十分条件を満たす簡約化順序および切り落とし関数の構成には，TRS の場合と同様の手法を用いることができる．ただし，本手法では，切り落とし関数がすべての余剰変数を削除することが追加されている．この制約は従来の依存グラフ法でも注目している依存対が満たすべき本質的な条件である．なぜなら TRS の場合でも切り落とし関数によって余剰変数が生じると証明が失敗するからである．しかし，ナローイングの停止性を示すには，すべての依存対が満たさなければならない点が，既存の条件とは異なる．次に，ナローイングの停止性を示すために用いる依存グラフは従来の依存グラフの部分グラフであることを示す．これにより，計算不可能なナローイング依存グラフの近似として，従来の依存グラフの近似グラフを利用できることがわかる．さらに，ナローイング計算の停止性を保証するための追加条件も示す．最後に，他の手法との比較を行う．

2. 準　　備

本稿は項書換え系の一般的な記法に従う [2,12]．

関数記号の集合を $\mathcal{F}$，変数の可算無限集合を $\mathcal{X}$ とする．関数記号 f の引数の個数を $arity(f)$ で表す．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{X}$ から生成されるすべての項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ と記す．また，2 つの項 s と t が等しいことを $s \equiv t$ と記し，項 t に含まれる変数の集合を $\mathcal{V}ar(t)$ と表す．**基礎項**の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F},\emptyset)$ は，$\mathcal{T}(\mathcal{F})$ と略記する．

項 t における**位置**の集合を $\mathcal{O}(t)$ と記す．位置 $p,q \in \mathcal{O}(t)$ に対して，$pp' = q$ を満たす $p' \in \mathcal{O}(t)$ が存在するとき，$p \leqq q$ と書く．特に $p' \neq \varepsilon$ のとき，$p < q$ と記す．$\mathtt{top}(t)$ は項 t の先頭 (位置 ε) の記号を表す．

文脈 $C[\ ]$ の位置 p に出現するホール $\square$ を項 t で置き換えることによって得られる項を $C[t]_p$ と記す．なお p を省略してもよい．項 u が t の**部分項**であるとき，$t \trianglerighteq u$ と記す．特に $\varepsilon < p$ であるとき，u は t の**真部分項**であるといい，$t \triangleright u$ と記す．また，位置 $p \in \mathcal{O}(t)$ における部分項 u を $u \equiv t|_p$ と記す．

代入 σ の**定義域**，**値域**は，それぞれ $\mathcal{D}om(\sigma)$, $\mathcal{R}an(\sigma)$ で表す．値域に現れる変数の集合を $\mathcal{VR}an(\sigma)$ で表す．$\mathcal{D}om(\sigma) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ であり，かつ $\sigma(x_i) = u_i$ のとき，σ を $\{x_1 \mapsto u_1, \cdots, x_n \mapsto u_n\}$ と記す．代入 σ の項 t への適用 $\sigma(t)$ を $t\sigma$ と記す．代入 σ,θ の合成 $\sigma\theta$ は $t\sigma\theta = \theta(\sigma(t))$ と定義される．σ の定義域を $X \subseteq \mathcal{X}$ に制限した代入 $\sigma|_X$ は $\{x \mapsto x\sigma \mid x \in \mathcal{D}om(\sigma) \cap X\}$ である．代入 σ,θ に対して $\sigma\delta = \theta$ となる代入 δ が存在するとき，$\sigma \lesssim \theta$ と記す．項 $t\sigma$ を t の**具体項**と呼ぶ．項 s,t が互いの具体項であるとき，s と t は**名前替え**であるという．すべての $x \in \mathcal{D}om(\sigma)$ について $\sigma(x) \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ のとき，σ を**基礎代入**と呼ぶ．項 s と t の最汎単一化子を $\mathtt{mgu}(s,t)$ と記す．

$\to$ を項上の二項関係とする．項 t から始まる無限の簡約化系列 $t \to t_1 \to \cdots$ が存在しないとき，項 t は $\to$ について**停止性を持つ**といい，$\mathrm{SN}_t^{\to}$ と記す．任意の項 t に対して $\mathrm{SN}_t^{\to}$ であるとき，$\to$ は停止性を持つといい，$\mathbf{SN}^{\to}$ と記す．また，任意の基礎項 t に対して $\mathrm{SN}_t^{\to}$ であるとき，$\to$ は**基礎項停止性を持つ**といい，$\mathbf{GSN}^{\to}$ と記す．

書換え規則とは，$l \notin \mathcal{X}$ を満たす項 l,r の対 (l,r) であり，$l \to r$ と記す．項 l,r をそれぞれ**左辺**，**右辺**と呼ぶ．書換え規則は他の規則と区別できるラベル ρ を用いて，$\rho : l \to r$ と書くこともある．書換え規則 $\rho : l \to r$ において，右辺のみに現れる変数 $x \in \mathcal{V}ar(r) \backslash \mathcal{V}ar(l)$ を**余剰変数** (extra variable) と呼ぶ．ρ のすべての余剰変数の集合を $\mathcal{EV}ar(\rho)$ で表す．**余剰変数付き項書換え系** (EV-TRS) は，書換え規則の集合 R である．特に全ての書換え規則 $l \to r$ において $\mathcal{V}ar(l) \supseteq \mathcal{V}ar(r)$ を満たす EV-TRS は**項書換え系** (TRS) である．R の書換え関係を $\to_R$ で表す．

擬順序 $\gtrsim$ とは反射的かつ推移的な二項関係である．$s \gtrsim t$ ならば $\forall C[\ ].\, C[s] \gtrsim C[t]$ であるとき擬順序 $\gtrsim$ が**文脈に閉じている**という．$s \gtrsim t$ ならば $\forall\sigma.\, s\sigma \gtrsim t\sigma$ であるとき，擬順序 $\gtrsim$ が**代入に閉じている**という．**（狭義の）半順序**（strict order）$\succ$ は推移的かつ非反射的な二項関係である．関係 $\succ$ の無限減少列が存在しないとき，$\succ$ は**整礎である**という．文脈と代入に閉じた擬順序 $\gtrsim$ を**擬簡約化順序**という．代入に閉じた整礎な半順序 $\succ$ と擬簡約化順序 $\gtrsim$ が $\gtrsim \circ \succ \subseteq \succ$ または $\succ \circ \gtrsim \subseteq \succ$ を満たすとき，順序の対 $(\gtrsim, \succ)$ を**簡約化対**という．

R を EV-TRS とする．R の**被定義記号**の集合 $\mathcal{D}_R$ および R の**構成子**の集合 $\mathcal{C}_R$ を，それぞれ $\mathcal{D}_R = \{\mathtt{top}(l) \mid l \to r \in R\}$, $\mathcal{C}_R = \mathcal{F} \backslash \mathcal{D}_R$ と定義する．$\mathcal{T}(\mathcal{C}_R,\mathcal{X})$ の項を**構成子項**と呼ぶ．R のすべての規則 $f(t_1,\cdots,t_n) \to r$ について各 t_i が構成子項であるとき，R を**構成子 EV-TRS** と呼ぶ．

次に，切り落とし関数 [7] の定義を与える．

定義 2.1 (切り落とし関数 [1,7,12])　$\mathcal{G}$ を関数記号の集合とする．**切り落とし関数** π は，すべての $f \in \mathcal{G}$ に対して，整数 $\pi(f) = i$ $(0 \leqq i \leqq arity(f))$ か整数のリスト $\pi(f) = [i_1,\ldots,i_m]$ を返す関数である（ただし各 i_k は $1 \leqq i_k \leqq arity(f)$ を満たす）(注1)．$\pi(f)$ が明示的に定義されていないときは，$\pi(f) = [1,\ldots,arity(f)]$ とする．π は以下のように項上の関数に拡張される：

(i)　$x \in \mathcal{X}$ のとき，$\pi(x) = x$,

(ii)　$\pi(f) = i$ のとき，$\pi(f(t_1,\ldots,t_n)) = \pi(t_i)$,

(iii)　$\pi(f) = [i_1,\ldots,i_m]$ のとき，$\pi(f(t_1,\ldots,t_n)) = f(\pi(t_{i_1}),\ldots,\pi(t_{i_m}))$.

さらに π を項の対の集合 S に拡張し，$\pi(S) = \{(\pi(s),\pi(t)) \mid (s,t) \in S\}$ と定義する．$\square$

(注1)：実用上は，$1 \leqq i_1 < \cdots < i_m \leqq arity(f)$ を仮定することが多い．

簡約化対と切り落とし関数は次のような順序を構成する．

定義 2.2 簡約化対 $(\succsim, \succ)$ と切り落とし関数 π から定められる順序 $(\succsim_\pi, \succ_\pi)$ は，以下のように定義される：

- $s \succsim_\pi t \iff \pi(s) \succ \pi(t)$ または $\pi(s) \equiv \pi(t)$,
- $s \succ_\pi t \iff \exists C \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{X}).\pi(s) \succ C[\pi(t)]$, または，$\pi(s) \equiv C[\pi(t)]_p$ $(\varepsilon < p)$. □

上記のように定義される順序対 $(\succsim_\pi, \succ_\pi)$ は簡約化対である [1,7,12]．

次に EV-TRS 上のナローイングの定義を与える．

定義 2.3 (ナローイング [6,14]) R を EV-TRS，s, t を項とする．p を s 中の位置，$\rho : l \to r \in R$ とする．このとき，$s|_p \notin \mathcal{X}$ かつ $t \equiv (C[r]_p)\sigma$ を満たす文脈 $C \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{X})$，最汎単一化子 $\sigma = \mathtt{mgu}(s, C[l]_p)$ が存在するならば，s は σ, p, ρ のもとで t に**ナローイング可能である**といい，$s \ {}_{\sigma|_{\mathcal{V}ar(s|_p)}}\!\!\rightsquigarrow_R^{[p,\rho]} t$ と記す．ただし，ρ の変数は常に新しい変数に名前替えされているとする．$\rightsquigarrow_R$ によって定まる関係を R の**ナローイング**という． □

$s \equiv t_0 \ {}_{\sigma_0}\!\!\rightsquigarrow_R t_1 \ {}_{\sigma_1}\!\!\rightsquigarrow_R \cdots \ {}_{\sigma_{n-1}}\!\!\rightsquigarrow_R t_n \equiv t$ をナローイング系列と呼び，$s \ {}_\sigma\!\!\overset{n}{\rightsquigarrow}_R t$ または $s \ {}_\sigma\!\!\overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ と記す．このとき $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$ であり，$n = 0$ のときは $\sigma = \emptyset$ とする．文脈から明らかなときは σ，p，ρ はどれも省略可能である．

次の定理は，書換え計算に対するナローイングの健全性を示したものである．

定理 2.4 ([10,14]) R を EV-TRS とする．任意の項 s, t および代入 δ に対して，$s \ {}_\delta\!\!\overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ ならば，$s\delta \overset{*}{\to}_R t$ である． □

例 2.5 次の EV-TRS $R_1 = \{\, f(x, 0) \to s(x), g(x) \to h(x, y), h(0, x) \to f(x, x), a \to b \,\}$ を考える．R_1 による基礎項 $g(0)$ からの書換え系列を考えると，2 番目の規則が適用できるが，余剰変数 y に $0, a, g(a), \cdots$ など任意の項を代入できる．そのため $g(0)$ を書換えると $h(0,0)$, $h(0,a)$, $h(0,g(a))$, $\cdots$ と $h(0,t)$（t は任意の項）の形の無限の項が得られることになり，$g(0)$ からの書換えは無限分岐となる．一方，基礎項 $g(0)$ から R_1 によってナローイングを行うと，$g(0) \rightsquigarrow_{R_1} h(0, z) \rightsquigarrow_{R_1} f(z, z) \ {}_{\{z \mapsto 0\}}\!\!\rightsquigarrow_{R_1} s(0)$ となる． □

有向グラフ $G = (V, E)$ は，有限個の**点**の集合 V と，**辺**と呼ばれる 2 点を結ぶ線分を表す順序対 (u, v) の集合 E からなる．有向グラフにおける点の系列 $v_1, \ldots, v_k$ を**有向パス**という．G の**強連結部分グラフ**とは，どの 2 点間に対しても両方向の有向パスが存在する G の部分グラフである．本稿では，辺の集合は省略して，点の集合で表す．

3. ナローイングの依存グラフ法

本節では，ナローイングが TRAT 性と呼ばれる性質を持つクラスを対象としたナローイングの停止性証明法として，TRS の依存グラフ法に基づいた手法を与える．EV-TRS 上のナローイングの基礎項停止性を示すための十分条件は，切り落とし関数が全ての依存対の余剰変数を削除するという点以外は，TRS の場合と同じ条件であることを示す．ゆえに簡約化対は TRS の依存グラフ法と同じ手法で構成できる．また，ナローイング依存グラフが書換え計算による依存グラフの部分グラフであることを示す．これにより TRS のあらゆる近似依存グラフがナローイングの停止性証明にも利用できる．さらに，一つの条件を加えることで，任意の項からのナローイングが停止するための十分条件となることを示す．

EV-TRS の停止性に依存対を用いるため，TRAT 性の概念を導入する [10]．項 t の全ての真部分項 u が $\mathrm{SN}_u^{\to}$ であるならば，無限系列 $t \to t_1 \to \cdots$ は**準停止性**（almost terminating）を持つという．準停止性を持つ無限系列が $\to^\varepsilon$ を含む場合，その無限系列は **TRAT 性**（top reduced almost terminating property）を持つという [10]．任意の無限列 $t \to t_1 \to \ldots$ について，t の部分項から始まる TRAT な無限列が存在するとき，関係 $\to$ が TRAT 性を持つという．書換え関係 $\to_R$ は TRAT 性を持つが，ナローイング計算 $\rightsquigarrow_R$ は一般には TRAT 性は持たない．

例 3.1 ([10]) $R_2 = \{f(f(x)) \to x\}$ は TRAT 性を持たない例である．項 $c(f(x), x)$ からのナローイングは $c(f(x), x) \ {}_{\{x \mapsto f(x')\}}\!\!\rightsquigarrow c(x', f(x')) \ {}_{\{x' \mapsto f(x'')\}}\!\!\rightsquigarrow c(f(x''), x'') \ {}_{\{x'' \mapsto f(x''')\}}\!\!\rightsquigarrow \cdots$ となり，準停止性を持つ無限書換え系列は位置 ε での書換えが生じない．よって，$\rightsquigarrow_{R_2}$ は TRAT 性を持たない． □

$\rightsquigarrow_R$ の TRAT 性について以下の命題が示されている．

命題 3.2 ([10]) R を EV-TRS とする．

- R が構成子 EV-TRS ならば，$\rightsquigarrow_R$ は TRAT 性を持つ．
- R が右線形ならば，$\rightsquigarrow_R$ は線形項上で TRAT 性を持つ． □

被定義記号のそれぞれに対応する新しい関数記号を導入する [12]．本稿では $\mathcal{F}$ には小文字一文字の関数記号しかないとして，被定義記号の集合 $\mathcal{D}$ から大文字の関数記号の集合を $\overline{\mathcal{D}} = \{F \mid f \in \mathcal{D}\}$ と定義する．また $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \overline{\mathcal{D}}$ と定義する．

依存対と，依存鎖 [1] を拡張したナローイング鎖を以下のように定義する．依存対は文献 [1] では TRS に対して定義されているが，EV-TRS においても同様に定義される [10]．

定義 3.3 (依存対 [1,10]) R を EV-TRS とし，$f(s_1, \cdots, s_n) \to C[g(t_1, \cdots, t_m)]$ を R の書換え規則とする．ただし，$g \in \mathcal{D}_R$ である．このとき，$\langle F(s_1, \cdots, s_n), G(t_1, \cdots, t_m) \rangle$ を R の**依存対**という．R のすべての依存対の集合を $\mathcal{DP}(R)$ と記す． □

EV-TRS R の依存対 $\langle s, t \rangle \in \mathcal{DP}(R)$ に対して，t 中にのみ現れる変数 x（$\in \mathcal{V}ar(t) \backslash \mathcal{V}ar(s)$）も**余剰変数**と呼ぶ．$\langle s, t \rangle$ の全ての余剰変数の集合を $\mathcal{EV}ar(\langle s, t \rangle)$ と記す．

定義 3.4 (ナローイング鎖 [10]) R を EV-TRS とする．各 i (> 0) に対して $t_i\sigma_i \overset{*}{\rightsquigarrow}_R s'_{i+1}$ を満たす項 s'_{i+1} と最汎単一化子 $\sigma_{i+1} = \mathtt{mgu}(s'_{i+1}, s_{i+1})$ が存在するとき，R の依存対の（有限あるいは無限の）系列 $\langle s_1, t_1 \rangle \ \langle s_2, t_2 \rangle \cdots$ を R の**ナローイング鎖**という．ただし，各 $\langle s_i, t_i \rangle$ は変数の重複がないように名前替えされているものとする．特に $s_0 \overset{*}{\rightsquigarrow}_R s'_1$ となる基礎項 s_0 と σ_1 が存在する場合，**基礎項から始まるナローイング鎖**という．上記の定義中の各 $s_i\sigma_i$ を**連結項**という． □

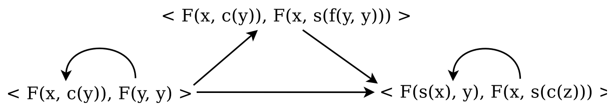

図 1　R_3 のナローイング依存グラフ $\mathcal{NDG}(R_3)$

TRAT 性を持つ EV-TRS のナローイングの停止性について次の定理が示されている．

定理 3.5 ([10])　R を EV-TRS，$\rightsquigarrow_R$ は TRAT 性を持つとする．

- $\mathrm{GSN}^{\rightsquigarrow_R}$ のとき，かつそのときに限り，R の基礎項から始まる無限のナローイング鎖が存在しない．
- $\mathrm{SN}^{\rightsquigarrow_R}$ のとき，かつそのときに限り，R の無限のナローイング鎖が存在しない．　$\square$

定理 3.5 により TRAT 性を持つ EV-TRS のナローイングの停止性を証明するには，無限のナローイング鎖が存在しないことを示せばよい．このとき，TRS の場合と同様に，無限のナローイング鎖においていくつかの依存対は一度しか現れない．このような無限回には現れない依存対を特徴化するためにナローイング鎖による依存グラフを定義する．

定義 3.6 (ナローイング依存グラフ)　R を EV-TRS とする．R の**ナローイング依存グラフ**とは，$V = \mathcal{DP}(R)$，$E = \{(\langle s,t\rangle, \langle u,v\rangle) \mid \langle s,t\rangle, \langle u,v\rangle$ がナローイング鎖 $\}$ を満たす有向グラフ (V,E) である．R のナローイング依存グラフを $\mathcal{NDG}(R)$ と記す．　$\square$

ナローイング依存グラフにおける強連結部分グラフは文献 [12] 中の**サイクル**（cycle）と同義である．

例 3.7　EV-TRS $R_3 = \{\ f(x,c(y)) \rightarrow f(x,s(f(y,y)))$, $f(s(x),y) \rightarrow f(x,s(c(z)))\ \}$ を考える．R_3 の依存対の集合は $\mathcal{DP}_{R_3} = \{\ \langle F(x,c(y)), F(x,s(f(y,y)))\rangle, \langle F(x,c(y)), F(y,y)\rangle$, $\langle F(s(x),y), F(x,s(c(z)))\rangle\ \}$ となる．R_3 のナローイング依存グラフは図 1 のようになり，$\mathcal{C}_1 = \{\langle F(x,c(y)), F(y,y)\rangle\}$, $\mathcal{C}_2 = \{\langle F(s(x),y), F(x,s(c(y)))\rangle\}$ の 2 つの強連結部分グラフが存在する．　$\square$

ナローイングの基礎項停止性が TRS の依存グラフ法と同じ十分条件で保証できることを，次の定理 3.10 に示す．基礎項から始まる無限のナローイング鎖について，R と $\mathcal{DP}(R)$ の全ての余剰変数を削除する切り落とし関数(注2) を用いることで，TRS の場合と同様の状況を可能としている点が本手法の特徴である．以下では，まず定理 3.10 の証明で利用する補題 3.8, 3.9 を示す．

補題 3.8　s,t を項，π を切り落とし関数とする．$\pi(s)$ は基礎項であり，かつ s と t は単一化子 σ を用いて単一化可能であるとする．このとき，以下が成り立つ．

(1)　$\pi(t\sigma)$ は基礎項である．

(2)　任意の代入 θ に対して $\pi(s\theta) \equiv \pi(s)$ である．

[略証]　t の構造に関する帰納法により証明できる．　$\square$

補題 3.9　R を EV-TRS，π を R の全ての余剰変数を削除する切り落とし関数，$\gtrsim$ を擬簡約化順序とする．項 s,t に対して $\pi(s)$ が基礎項であるとし，さらに，すべての書換え規則 $l \rightarrow r \in R$ に対して $l \gtrsim_\pi r$ とする．このとき，$s \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t$ ならば $s \gtrsim_\pi t$ であり，かつ $\pi(t)$ は基礎項である．

[証明]　$\overset{*}{\rightsquigarrow}_R$ は反射推移的閉包であり，$\gtrsim$ は反射的かつ推移的であるので，$s \rightsquigarrow_R t$ ならば，$s \gtrsim_\pi t$ かつ $\pi(t)$ は基礎項であることをを示せば十分である．

$l \rightarrow r \in R$ に対して，$s \rightsquigarrow_R t$ かつ $\pi(s)$ が基礎項であると仮定する．このとき定義より，文脈 C および $\sigma = \mathtt{mgu}(s, C[l]_p)$ が存在して，$t \equiv (C[r]_p)\sigma$ である．$\pi(s)$ が基礎項であるので，$\pi(C)$ も基礎項である．

- π によって文脈 C 中の $\Box$ が削除された場合．$\pi(s) \equiv \pi(C[s|_p]_p) \equiv \pi(C)$ であり，また，$\pi(t) \equiv \pi((C[r]_p)\sigma) \equiv \pi(C\sigma[r\sigma]_p) \equiv \pi(C\sigma) \equiv \pi(C)$ である．ゆえに，$\pi(s) \equiv \pi(t)$ であり，$\pi(t)$ は基礎項である．
- それ以外の場合．$\pi(s)$ が基礎項より $\pi(s|_p)$ は基礎項であるので，補題 3.8 (2) より $\pi(s|_p) \equiv \pi(s|_p\sigma) \equiv \pi(l\sigma)$．よって $\pi(s) \equiv \pi(C[s|_p]_p) \equiv \pi(C)[\pi(l\sigma)]$ である．一方，$\pi(t) \equiv \pi((C[r]_p)\sigma) \equiv \pi(C\sigma[r\sigma]_p) \equiv \pi(C\sigma)[\pi(r\sigma)]_q \equiv \pi(C)[\pi(r\sigma)]_q$ である．$\gtrsim$ と $\gtrsim_\pi$ は代入と文脈に閉じているので，$l\sigma \gtrsim_\pi r\sigma$ より $\pi(C)[\pi(l\sigma)] \gtrsim \pi(C)[\pi(r\sigma)] \equiv \pi(t)$ である．よって $\pi(s) \gtrsim \pi(t)$ である．

  $\pi(s|_p)$ は基礎項であることと補題 3.8 (1) より $\pi(l\sigma)$ も基礎項である．さらに π は R の全ての余剰変数を削除するので，$\mathcal{V}ar(\pi(l)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(r))$ であり，よって，$\pi(r\sigma)$ も基礎項である．したがって，$\pi(t) \equiv \pi(C)[\pi(r\sigma)]$ は基礎項である．　$\square$

定理 3.10　R を EV-TRS とする．$\mathcal{NDG}(R)$ の各強連結部分グラフ $\mathcal{C}$ に対して，次の 3 つの条件を満たす $\mathcal{T}(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{X})$ 上の簡約化対 $(\gtrsim, \succ)$ と，R と $\mathcal{DP}(R)$ の全ての余剰変数を削除する切り落とし関数 π が存在するならば，基礎項からの無限のナローイング鎖は存在しない．

(i)　すべての書換え規則 $l \rightarrow r \in R$ に対して，$l \gtrsim_\pi r$.

(ii)　すべての依存対 $\langle s,t\rangle \in \mathcal{C}$ に対して，$s \gtrsim_\pi t$.

(iii)　ある依存対 $\langle s',t'\rangle \in \mathcal{C}$ に対して，$s' \succ_\pi t'$.

さらに，上記の 3 つの条件に加えて次の条件も満たすならば任意の項からの無限のナローイング鎖は存在しない。

(iv)　$\pi(t'')$ が基礎項である依存対 $\langle s'',t''\rangle \in \mathcal{C}$ が存在する．

[証明]　基礎項からの無限のナローイング鎖 $\langle s_1,t_1\rangle\langle s_2,t_2\rangle\cdots$ が存在すると仮定する．TRS の依存グラフ法での議論と同様に，無限のナローイング鎖は $\mathcal{NDG}(R)$ 中の無限パスに対応し，これはある強連結部分グラフ $\mathcal{C}$ を無限にループしている．よって，この無限ナローイング鎖が，ある $\langle s_k,t_k\rangle$ から強連結部分グラフを無限にループするとする．ここで仮定より，ある基礎項

(注2)：R を EV-TRS，π を切り落とし関数とする．全ての項の組 $(s,t) \in R \cup \mathcal{DP}(R)$ に対して $\mathcal{V}ar(\pi(s)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(t))$ であるとき，π は R と $\mathcal{DP}(R)$ の**全ての余剰変数を削除する**という．

$s_0 \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ が存在して，$s_0 \overset{*}{\rightsquigarrow} s_1'$，$\sigma_1 = \mathtt{mgu}(s_1', s_1)$ である．基礎項 s_0 から始まるナローイング鎖では，$\pi(s_0)$ は基礎項であるので，補題 3.9 より $\pi(s_1')$ は基礎項である．さらに s_1' と s_1 は最汎単一化子 σ_1 を用いて単一化可能であったので補題 3.8 (1) より $\pi(s_1\sigma_1)$ は基礎項である．仮定より，$\mathcal{V}ar(\pi(s_1)) \supseteq \mathcal{V}ar(\pi(t_1))$ であるので，$\pi(t_1\sigma_1)$ は基礎項である．以降同様の議論により，$\pi(t_i\sigma_i)$ は基礎項であり，ゆえに補題 3.9 と仮定より無限の系列 $\pi(t_k\sigma_k) \succsim \pi(s_{k+1}\sigma_{k+1}) \succsim \pi(t_{k+1}\sigma_{k+1}) \succsim \cdots$ が得られる．仮定より，$s' \succ_\pi t'$ である依存対 $\langle s', t' \rangle \in \mathcal{C}$ が存在するので，無限系列中に $\succ$ が無限回現れる．しかしこれは $\succ$ の整礎性に矛盾する．

次に条件 (iv) が満たされているときに，無限のナローイング鎖が存在しないことを示す．無限ナローイング鎖が存在し，強連結部分グラフ $\mathcal{C}$ で無限ループすると仮定する．条件 (iv) より，$\mathcal{C}$ 中のある依存対 $\langle s'', t'' \rangle$ に対して $\pi(t'')$ が基礎項であるので，$\langle s'', t'' \rangle$ 以降のナローイング鎖は基礎項 $\pi(t'')$ から始まる無限系列 $\pi(t'') \succsim \pi(s_l\sigma_l) \succsim \pi(t_l\sigma_l) \succsim \pi(s_{l+1}\sigma_{l+1}) \succsim \cdots$ となる．ここで前半の議論と同様に $\succ$ の整礎性に矛盾することが示せる． □

例 3.11　例 3.7 の R_3 に対して，強連結部分グラフは $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ の 2 つであった．まず $\mathcal{C}_1 = \{\langle F(x, c(y)), F(y, y) \rangle\}$ に対しては，切り落とし関数 π_1 を $\pi_1(f) = [1]$，関数記号の順序を $f > s$ として，再帰経路順序を用いれば各不等式が成立する．また，$\mathcal{C}_2 = \{\langle F(s(x), y), F(x, s(c(y))) \rangle\}$ に対しては，切り落とし関数 π_2 を $\pi_2(f) = [1]$，$\pi_2(F) = [1]$，関数記号の順序を $f = F > s > c$ として，再帰経路順序を用いれば各不等式が成立する．ゆえに定理 3.10 より，$\mathrm{GSN}^{\rightsquigarrow_{R_3}}$ である． □

ナローイング依存グラフの辺の構成にあたって，項 s, t に対して $s \overset{*}{\rightsquigarrow}_R t'$ かつ t' と t が単一化可能となる代入 σ と項 t' が存在するか否かということは決定不能であるため，$\mathcal{NDG}(R)$ を自動的に求めることができない．しかし，書換え計算に対するナローイングの健全性（定理 2.4）から，ナローイング依存グラフは依存グラフの部分グラフであることが示される．

定理 3.12　任意の EV-TRS R に対して，$\mathcal{NDG}(R) \subseteq \mathcal{DG}(R)$．

[証明]　$\mathcal{NDG}(R) = (\mathcal{DP}(R), E)$，$\mathcal{DG}(R) = (\mathcal{DP}(R), E')$ とし，$e \in E$ ならば $e \in E'$ を示す．

$(\langle s, t \rangle, \langle u, v \rangle) \in E$ とする．このとき，定義より，ある項 u' と代入 δ，σ および最汎単一化子 $\sigma' = \mathtt{mgu}(u', u)$ が存在して，$t\sigma \ {}_{\delta}\overset{*}{\rightsquigarrow} u'$ である．定理 2.4 より $t\sigma\delta \overset{*}{\rightarrow}_R u'$ である．最汎単一化子の定義から $u'\sigma' \equiv u\sigma'$ であり，書換え関係は代入に閉じていることから，$t\sigma\delta\sigma' \overset{*}{\rightarrow}_R u'\sigma' \equiv u\sigma'$ である．ゆえに，依存グラフの定義より，$(\langle s, t \rangle, \langle u, v \rangle) \in E'$ である． □

次の例は定理 3.12 の逆（$\mathcal{NDG}(R) \supseteq \mathcal{DG}(R)$）の反例である．

例 3.13　EV-TRS $R_4 = \{f(x) \to g(y, y),\ g(b, a) \to a,\ a \to b, a \to c\}$ の依存対は $\mathcal{DP}(R_4) = \{\langle F(x), G(y, y) \rangle, \langle G(b, c), A \rangle\}$ である．$\mathcal{DG}(R_4)$ では，$\sigma = \{y \mapsto a\}$ が存在して $G(y, y)\sigma \overset{*}{\rightarrow}_R G(b, c)$ となるので，依存対間に辺が存在する．一方 $\mathcal{NDG}(R_4)$ では，最汎単一化子の定義より余剰変数 y には代入がされず，$\sigma = \mathtt{mgu}(G(y, y), G(b, c))$ となる最汎単一化子 σ は存在しない．よって，この依存対間には辺が存在しない． □

TRS の近似依存グラフについてこれまでに多くの研究がされている [1,8,9]．文献 [1] では見積り依存グラフを構成する方法が，文献 [9] では s-近似，nv-近似，*growing*-近似の 3 種類の近似方法が，そして文献 [8] では ω-書換えおよび Ω-書換えに基づいた近似方法が示されている．定理 3.12 よって，これらを含め，TRS のあらゆる近似依存グラフはナローイング依存グラフの近似として利用できることが示された．

本節の結果は，ナローイングにおける依存グラフ法として以下のようにまとめられる．

系 3.14　R を EV-TRS とし，$\rightsquigarrow_R$ は TRAT 性を持つとする．R の（近似）依存グラフ G（$G \supseteq \mathcal{DG}(R)$）中の各強連結部分グラフ $\mathcal{DP}(R)$ に対して，次の 3 つの条件を満たす $\mathcal{T}(\overline{\mathcal{F}}, \mathcal{X})$ 上の簡約化対 $(\succsim, \succ)$ と，R と $\mathcal{DP}(R)$ の全ての余剰変数を削除する切り落とし関数 π が存在するならば，R のナローイングは基礎項停止性を持つ．

(i)　すべての書換え規則 $l \to r \in R$ に対して，$l \succsim_\pi r$．

(ii)　すべての依存対 $\langle s, t \rangle \in \mathcal{C}$ に対して，$s \succsim_\pi t$．

(iii)　ある依存対 $\langle s', t' \rangle \in \mathcal{C}$ に対して，$s' \succ_\pi t'$．

さらに、上記の 3 つの条件に加えて次の条件も満たすならば，R のナローイングは停止性を持つ．

(iv)　$\pi(t'')$ が基礎項である依存対 $\langle s'', t'' \rangle \in \mathcal{C}$ が存在する． □

系 3.14 の基礎項停止性の条件と TRS の依存グラフ法 [1] とを比較すると，違いは切り落とし関数が全ての余剰変数を削除するという制約だけである．この制約は従来の依存グラフ法では注目している強連結部分グラフ $\mathcal{C}$ 中の依存対が満たすべき本質的な条件である．なぜなら TRS の場合でも切り落とし関数によって，それら依存対のうちのいずれかに余剰変数が生じると証明が失敗するからである．一方，本手法ではすべての依存対に対して，π が全ての余剰変数を削除しなければならない．これは書換えとナローイングの性質の違いが反映されて生じる違いである．次の例が，この制約が外れた場合の反例となる．

例 3.15　EV-TRS $R_5 = \{a \to h(x), h(0) \to 0, h(s(s(x))) \to s(h(x))\}$ を考える．依存対の集合は $\mathcal{DP}(R_5) = \{\langle A, H(x) \rangle, \langle H(s(s(x))), H(x) \rangle\}$ であり，強連結部分グラフの点集合は $\mathcal{C} = \{\langle H(s(s(x))), H(x) \rangle\}$ である．$a = A > h = H > s$ により定まる再帰経路順序と $\pi_3 = \emptyset$ である AF では (i)〜(iii) の条件を満たすが，実際には $\mathrm{GSN}^{\rightsquigarrow_R}$ ではない．これは $\langle A, H(x) \rangle$ の余剰変数を切り落としていないことが原因である．よって，注目している強連結部分グラフ中の依存対以外のすべての依存対について，切り落とし関数は全ての余剰変数を削除しなければならない． □

上記の差分は，依存対法では生じない．ゆえに，系 3.14 を依存対法に弱めた手法は，既存の TRS の停止性証明ツール（AProVE [4]，TTT [5] など）に入力に EV-TRS を許すだけで組み込むことができると予想される．

少なくとも本節の議論により，$\mathrm{GSN}^{\rightsquigarrow_R}$ を示すための簡約化

対と依存グラフの構成には，TRS と同様の手法で構成できることがわかる．

4. 既存手法との比較

EV-TRS 上のナローイングの停止性証明法には，文献 [10] で示されている依存対法に基づいた証明法がある．文献 [10] では，本稿の定理 3.10 における依存対の条件が (ii)，(iii) の代わりに，“全ての $\langle s,t\rangle \in \mathcal{DP}$ に対して $s \succ_\pi t$ である” というものであること，そして切り落とし関数に単純性という制約がついていたことの 2 点が本稿の手法と異なる．文献 [10] の依存対に対する条件を満たすならば，本稿の定理 3.10 の条件も明らかに満たす．ここで，切り落とし関数 π が**単純** (simple) であるとは EV-TRS R の全ての被定義記号 $f \in \mathcal{D}_R$ および関数記号 $F \in \overline{\mathcal{D}}_R$ に対して，$\pi(f)$ と $\pi(F)$ がともに整数のリストを返すときをいう．一方，本手法は切り落とし関数の単純性を要求しない．

一方，文献 [14] の手法では，EV-TRS R の被定義記号のみで関数の呼び出し関係を表現した TRS R_{dp} を用いて “$\mathrm{SN}^{\to_{R_{dp}}}$ ならば $\mathrm{SN}^{\rightsquigarrow_R}$” であることを証明している．$R_{dp}$ は $\mathcal{NDG}(R)$ の近似グラフなので，提案手法であるナローイング依存グラフ法の一例であるとみなせる．ただし文献 [14] の定理 13 が成立するためには，条件が抜けており，$\rightsquigarrow_R$ の TRAT 性が必要である．例 3.1 は，TRAT 性を持たない場合での反例となる．

以上のことから，本手法は文献 [10, 14] の手法を被覆しているといえる．

文献 [3] では，左辺平滑な TRS のナローイングの停止性を保証する十分条件を示している．左辺平滑とは，左辺において変数の位置が深さ 1 以下である書換え規則である．左辺平滑な EV-TRS のナローイングは一般には TRAT 性を持たない．実際，$R_6 = \{a \to a, f(a) \to b\}$ に対して，項 $c(f(x), x)$ からのナローイング系列は TRAT 性を持たない．しかし，この例の場合は左辺に停止性を持たない真部分項を持つ (EV-)TRS であり，この場合は停止性を持たない．左辺が平滑かつ左辺の全ての真部分項が停止性を持つ場合には，基礎項からのナローイングは TRAT 性を持つと予想している．この予想が正しければ，本稿の手法はナローイングの基礎項停止性証明については文献 [3] の手法を被覆する．また，ナローイングの停止性の証明については，違いについて明らかになっていない．

5. ま と め

本稿では, 右線形または構成子 EV-TRS 上のナローイングの停止性証明法として，依存グラフを用いた証明手法を示した．これは TRS の依存グラフ法に基づいたものであり，本手法では近似ナローイング依存グラフの構成および停止する十分条件を満たす簡約化対と切り落とし関数の構成には，切り落とし関数に全ての余剰変数を削除するという条件のみを追加することで，既存の TRS の手法をそのまま利用できることを示した．

本稿の結果から，逆計算 TRS の書換えを模倣するナローイング計算の停止性証明が可能となる．また ω-書換え [13] は，両辺を線形化して得られる右線形 EV-TRS による線形項からのナローイングに相当する．よって，ナローイングの停止性証明は ω-書換えの停止性証明にも利用できる．

左辺平滑な EV-TRS の TRAT 性に関する予想を証明すること，TRAT 性を持つ他の EV-TRS のクラスを発見することが今後の課題である．

謝 辞 本研究は一部，科研費#15500007，#16650005，#17700009 ならびに名古屋大学 21 世紀 COE プログラム（社会情報基盤のための音声・映像の知的統合）の補助を受けている．

文 献

[1] T. Arts and J. Giesl: “Termination of term rewriting using dependency pairs”, Theoretical Computer Science, Vol. 236, pp. 133–178 (2000).

[2] F. Baader and T. Nipkow: “Term Rewriting and All That”, Cambridge University Press (1998).

[3] J. Christian: “Some termination criteria for narrowing and e-narrowing”, Proceedings of 11th Internatinal Conference on Automated Deduction, Vol. 607 of LNAI, pp. 582–588 (1992).

[4] J. Giesl, R.Thiemann, P.Schneider-Kamp and S.Falke: “Automated termination proofs with aprove”, Proceedings of the 15th Int. Conference on Rewriting Techniques and Applications, Vol. 3091 of LNCS, pp. 210–220 (2004).

[5] N. Hirokawa and A.Middeldorp: “Tsukuba termination tool”, Proceedings of the 14th International Conference on Rewriting Techniques and Applications, Vol. 2703 of LNCS, pp. 311–320 (2003).

[6] J.-M. Hullot: “Canonical forms and unification”, Proceedings of the 5th International Conference on Automated Deduction, Vol. 87 of LNCS, pp. 318–334 (1980).

[7] K. Kusakari, M. Nakamura and Y. Toyama: “Argument filtering transformation”, Proceedings of Internatinal Conference on Principles and Practice of Declarative Programming, Vol. 1702 of LNCS, pp. 47–61 (1999).

[8] K. Kusakari: “Termination, AC-Termination and Dependency Pairs of Term Rewriting Systems”, PhD thesis, JAIST (2000).

[9] A. Middeldorp: “Approximatin dependency graphs using tree automat techniques”, Proceedings of the Internatinal Joint Conference on Automated Reasoning, Vol. 2083 of LNAI, Siena, pp. 593–610 (2001).

[10] N. Nishida, M. Sakai and T. Sakabe: “Narrowing-based simulation of term rewriting systems with extra variables and its termination proof”, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, Vol.86, 3 (2003).

[11] N. Nishida, M. Sakai and T. Sakabe: “Partial inversion of constructor term rewriting systems”, Proceedings of the 16th Internatinal Conference on Rewriting Techniques and Applications, Vol. 3467 of LNCS, pp. 264–298 (2005).

[12] E. Ohlebusch: “Advanced Topics in Term Rewriting”, Springer (2001).

[13] M. Oyamaguchi: “A Decidable Condition for Call-by-Need Computations in Term Rewriting Systems”, SIAM Journal on Computation, Vol.22, 1, pp.112–135, (1993).

[14] 西田, 酒井, 坂部：“右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系の計算モデル”, コンピュータソフトウェア, Vol. 20, 5, pp. 85–89 (2003).

[15] 西田, 酒井, 坂部：“構成子項書換え系の逆計算プログラムの生成”, 電子情報通信学会論文誌 (2005). 掲載予定.

[16] 西田, 酒井, 坂部：“右辺のみに現れる変数を持つ項書換え系のナローイングに基づく実効的書換えとその停止性”, 電子情報通信学会技術研究報告, COMP 2002-68 (2003).