社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

重なりを持つ TRS における最外戦略の完全性について

岩田　篤史†　酒井　正彦††　西田　直樹††　草刈　圭一朗††　坂部　俊樹††

†, †† 名古屋大学大学院情報科学研究科
〒 464-8603 名古屋市千種区不老町
E-mail: †aiwata@trs.cm.is.nagoya-u.ac.jp, ††{sakai,nishida,kusakari,sakabe}@is.nagoya-u.ac.jp

あらまし　項書換え系（TRS）において，戦略は与えられた項の書換え可能な位置のうち書換えるべき位置を指示する．重なりを持つ TRS では，一般に項は複数の正規形を持つため，与えられた項のすべての正規形が求められる完全な戦略が望まれる．本稿では，重なりを持つ TRS において最外戦略が完全であるための十分条件を与える．また，与えられた TRS を，この条件を満たすように等価変換する方法についても論ずる．
キーワード　項書換え系，最外戦略，完全な戦略

On Completeness of Outermost Strategy for Overlapping TRSs

Atsushi IWATA†, Masahiko SAKAI††, Naoki NISHIDA††,
Keiichirou KUSAKARI††, and Toshiki SAKABE††

†, †† Graduate School of Information Science, Nagoya University
Furou-chou, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8603, Japan
E-mail: †aiwata@trs.cm.is.nagoya-u.ac.jp, ††{sakai,nishida,kusakari,sakabe}@is.nagoya-u.ac.jp

Abstract　Strategies in term rewriting systems (TRSs) indicate a position of a given term to be reduced. Since a term generally has more than one normal forms in overlapping systems, it is desired to find a complete strategy, which can search all normal forms of a given term. This paper gives a sufficient condition that guarantees the completeness of the outermost strategy for overlapping TRSs. We also discuss an equivalent transformation of TRSs in order to obtain ones that satisfy the sufficient condition.
Key words　term rewriting system, outermost strategy, complete strategy

1. はじめに

項書換え系（TRS）は関数型プログラムの計算モデルとして，これまでに広く研究がなされている．TRS においては，どの位置の計算を実行するかによって，解が求められるかどうかが決まる．この計算の箇所を指示するものが戦略である．

重なりを持たない TRS に対して，解が存在するならば必ずそれを求めることができる正規化戦略の研究はこれまで盛んに行われてきた [2], [3]．また，重なりを許した TRS に対して，正規化戦略の拡張も行われている [4]．しかし，これらの TRS のクラスはいずれも合流性と呼ばれる性質を持ち，解の一意性が保証されるクラスである．

一方で，TRS では非決定性の計算を記述することができ，例えば，逆像計算など本質的に解が複数存在するような計算を記述することもできる．また，与えられた TRS の計算の逆像計算を行う TRS を自動で生成する手法も提案されている [6]．このような TRS は重なりを持つ規則を含み，かつ，合流性を持たないクラスであるが，重なりを持つ TRS に関しては性質の解析が難しく研究は進んでいない．逆像計算のように，存在するすべての解に到達することが望まれる場合，しらみつぶし的にこれを得ることは非効率的である．したがって，すべての解に到達できることを保証する，すなわち，完全な戦略が存在すれば，戦略によって指定される箇所のみ計算を実行すればよく，効率的にすべての解を求めることができる．そのため，戦略の完全性に関する研究は重要である．

これまでに，TRS が停止性，右線形性かつオーバーレイ性のすべてを満たしているとき，最内戦略が完全であることが示されている [5]．さらに，重なりに関しての制限を緩和するために，弱最内戦略の提案もなされた [8]．しかし，これらの戦略のいずれにおいても，停止性という非常に強い制限が本質的に必要となる．一方で，TRS が線形性かつ強オーバーレイ性を満たすとき，並列最外戦略が完全であることが示されている [7].

しかし，強オーバーレイ性は重なりを持つ TRS に対して非常に強い制限である．

一般に，重なりを持つ TRS に対して，最外戦略は完全ではない．本稿では，このような TRS に対して，最外戦略が完全になるための十分条件を提案する．また，与えられた TRS をこの条件を満たす TRS へ等価変換することによって，より広い範囲の TRS に本手法を適用可能にする方法についても議論する．

2. 項書換え系

本稿で取り扱う項書換え系の基本的な概念について述べる．記法には一般的なものを用いる [1].

関数記号の集合を $\mathcal{F}$，**変数**の集合を $\mathcal{X}$ で表し，$\mathcal{F} \cap \mathcal{X} = \emptyset$ とする．**項**は関数記号と変数から構成され，項の集合を $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ で表す．項 t に現れるすべての変数の集合を $\mathcal{V}ar(t)$ で表す．項 s, t が同じであるとき $s \equiv t$ と表す．

項 t のすべての**位置**の集合を $\mathcal{P}os(t)$ は次のように定義される．

- $t \equiv x \in \mathcal{X}$ のとき，$\mathcal{P}os(t) = \{\varepsilon\}$.
- $t \equiv f(t_1, \cdots, t_n)$ のとき，$\mathcal{P}os(t) = \{\varepsilon\} \cup \{ip \mid 1 \leqq i \leqq n, p \in \mathcal{P}os(t_i)\}$.

このうち，関数記号の位置の集合を $\mathcal{FP}os(t)$，変数の位置の集合を $\mathcal{VP}os(t)$ で表す．ε で項の先頭の位置を表す．$p, q \in \mathcal{P}os(t)$ について，$q = pp'$ となる p' が存在するとき $p \preceq q$ と表す，特に，$p \neq q$ のときは $p \prec q$ と表す．$p \not\preceq q$ かつ $q \not\preceq p$ のとき，p と q は**並列**であるといい，$p \parallel q$ と表す．$q = pp'$ のとき，$q/p = p'$ と定義する．また，位置 p と位置の集合 $\mathcal{P}$ について，$p \cdot \mathcal{P} = \{pp' \mid p' \in \mathcal{P}\}$ と定義する．

項 t の位置 p にある項を**部分項**といい，$t|_p$ で表す．$t|_p$ を項 s で置き換えて t から得られる項を $t[s]_p$ と表す．さらに，項 t の互いに並列な n（$\geqq 0$）個の位置 $p_1, \cdots, p_n$ について，$t|_{p_1}, \cdots, t|_{p_n}$ をそれぞれ $s_1, \cdots, s_n$ で置き換えて t から得られる項を $t[s_1, \cdots, s_n]_{p_1, \cdots, p_n}$ と表す．

$\mathcal{X}$ から $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ への写像 θ で，その定義域 $\mathcal{D}om(\theta) = \{x \mid x\theta \not\equiv x\}$ が有限であるものを**代入**という．$x\theta$ は $\theta(x)$ を表す．項 t に現れるすべての変数に代入 θ を適用したものを $t\theta$ と表す．代入 δ, θ は，任意の $x \in \mathcal{X}$ について $x\delta\delta' = x\theta$ を満たす代入 δ' が存在するとき，$\delta \lesssim \theta$ と表す．項 s, t は，$s\sigma \equiv t\sigma$ となる代入 σ が存在するとき，**単一化可能**であるといい，σ を s と t の**単一化子**という．さらに，s, t の任意の単一化子 σ' に対して $\sigma \lesssim \sigma'$ であるときは σ を s と t の**最汎単一化子**といい，$\mathrm{mgu}(s, t)$ と表す．代入 θ, θ' に対して，$\mathcal{D}om(\theta) \cap \mathcal{D}om(\theta') = \emptyset$ のとき，代入の和 $\sigma = \theta \cup \theta'$ を，$x \in \mathcal{D}om(\theta)$ に対して $x\sigma \equiv x\theta$，かつ，それ以外の x に対して $x\sigma \equiv x\theta'$ と定義する．

書換え規則は $T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ 上の二項組 (l, r) で $l \notin \mathcal{X}$ とする．書換え規則を $l \triangleright r$ と表す．**項書換え系（TRS）**は $\mathcal{V}ar(l) \supseteq \mathcal{V}ar(r)$ を満たす書換え規則 $l \triangleright r$ の集合で定義される．TRS R による項上の**書換え関係** $\rightarrow_R$ は，次のように定義される．すなわち，$s \rightarrow_R t$ とは，$l \triangleright r \in R$ と代入 θ と $p \in \mathcal{P}os(s)$ が存在して，$s \equiv s[l\theta]_p$ かつ $t \equiv s[r\theta]_p$ であることをいう．また，規則や代入を明示して $s \xrightarrow[p, l \triangleright r, \theta]{}_R t$ と書くこともある．項 $l\theta$ を**リデックス**といい，リデックスを持たない項を**正規形**という．正規形の集合を $\mathcal{NF}$ で表す．特に，書換え関係 $\rightarrow_R$ を明示させる場合は $\mathcal{NF}_{\rightarrow_R}$ と書く．$\rightarrow_R$ の推移閉包，反射推移閉包をそれぞれ $\xrightarrow{+}_R$，$\xrightarrow{*}_R$ と表す．**並列書換え** $s \mathrel{+\!\!\!\!\!\rightarrow}_R t$ は，各 i について $l_i \triangleright r_i \in R$ と代入 θ_i と $p_i \in \mathcal{P}os(s)$ が存在して，$s \equiv s[l_1\theta_1, \cdots, l_n\theta_n]_{p_1, \cdots, p_n} (n \geqq 0)$ かつ $t \equiv s[r_1\theta_1, \cdots, r_n\theta_n]_{p_1, \cdots, p_n}$ であることをいう．並列書換えに用いたリデックスの位置 $p_1, \cdots, p_n$ の集合を Δ で表し，$s \underset{\Delta}{\mathrel{+\!\!\!\!\!\rightarrow}}_R t$ と書くこともある．また，包含関係 $\rightarrow_R \subseteq \mathrel{+\!\!\!\!\!\rightarrow}_R \subseteq \xrightarrow{*}_R$ が成立する．

項は同じ変数が二回以上現れていないとき**線形**であるという．すべての $l \triangleright r \in R$ について，左辺 l（右辺 r）が線形であるとき，R は**左線形（右線形）**であるという．

書換え規則 $l \triangleright r$ と $l' \triangleright r'$ は，$p \in \mathcal{FP}os(l)$ について $l|_p$ と l' が単一化可能であるとき，位置 p において**重なり**を持つという．R のどの規則同士も位置 ε 以外では重なりを持たないとき，R は**オーバーレイ性**を持つという．

3. 書換え戦略

二項関係 $\rightarrow_c$ は $\rightarrow_c \subseteq \rightarrow_R$ かつ $\mathcal{NF}_{\rightarrow_R} = \mathcal{NF}_{\rightarrow_c}$ を満たしているとき，R の**書換え戦略**であるという．さらに，任意の項 s について $s \xrightarrow{*}_R t \in \mathcal{NF}_{\rightarrow_R}$ ならば $s \xrightarrow{*}_c t$ であるとき，書換え戦略 $\rightarrow_c$ は**完全**であるという．

R が合流性を持つならば，与えられた項の唯一の正規形には，書換え戦略で到達可能である．R が合流性を持たない場合でも，$\rightarrow_R$ を幅優先探索することによってすべての正規形に到達可能であるが非効率的である．しかしながら，完全な書換え戦略 $\rightarrow_c$ が存在すれば，探索空間を $\rightarrow_R$ から $\rightarrow_c$ に狭めることができ，効率面の向上が期待できる．

項 $t \equiv t[u]_p$ のリデックス u は，$q \prec p$ なる位置 $q \in \mathcal{P}os(t)$ にはリデックスが存在しないとき，**最外リデックス**であるという．最外リデックスを書換える書換えを $\rightarrow_o$ で表す．$\rightarrow_o$ は書換え戦略であり，これを**最外戦略**という．また，最外でない位置の書換えを $\rightarrow_{\neg o}$ と表す．最外戦略は，左線形かつ重なりを持たない TRS に対して完全であるが，一般には完全ではない．

例 1　以下の TRS R_1 において最外戦略は完全ではない．

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \triangleright c \\ f(g(x)) \triangleright d \\ a \triangleright g(a) \end{array} \right\}$$

$f(a)$ は正規形 c と d を持つ．しかし，$f(a)$ から d に到達するためには，$f(a) \rightarrow_{\neg o} f(g(a))$ と書換える必要があるので，最外戦略は完全でない（図 1）．■

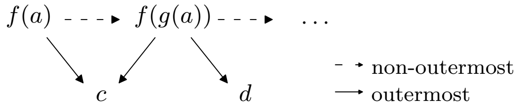

図 1　R_1 における $f(a)$ からの書換え

R の書換え戦略 $\rightarrow_c$ は，項 s が正規形を持つならば $s \rightarrow_c s' \rightarrow_c \cdots$ となる無限書換え系列が存在しないとき，R の**正規化戦略**であるという．書換え戦略が正規化戦略であれば，与えられた項が正規形を持つならば，その正規形のうちの少なくとも一つをバックトラックなしで求めることができる．しかし，合流性を持たない TRS に対しては，書換え戦略が正規化戦略となるクラスを決定可能な条件によって定義することは難しい．

例 2　例 1 の R_1 において最外戦略は正規化戦略であるが，以下の TRS R_2 において最外戦略は正規化戦略ではない．

$$R_2 = R_1 \cup \{c \triangleright c\}$$

R_1 に $c \triangleright c$ という規則を追加したことにより，c は $f(a)$ の正規形ではなくなり，d が唯一の正規形となる．つまり，$f(a)$ には正規形が存在するが，最外戦略では，もはやこれを求めることはできない．■

このような問題を解決するためには，書換え戦略に完全性を保証することが本質的に必要と考えられる．

4. 最外戦略を完全にするための条件

与えられた項が複数の正規形を持つならば，その項から書換え系列中には規則同士が重なっている項が存在している．この重なりを発生した項に最外戦略で到達できない場合，書換えの分岐の可能性を摘み取るということになる．例 1 の R_1 について $f(g(a))$ は重なりが発生した項であり，$f(a) \rightarrow_{\neg o} f(g(a))$ であるゆえに，最外戦略が完全にならない．このような状況を回避するために，次の二つの TRS の性質を考える．

性質 1　$\sigma = \mathrm{mgu}(l'|_p, r)$ なる $p \in \mathcal{FP}os(l')$ が存在する，次の二つの任意の $l \triangleright r, l' \triangleright r' \in R$ に対して，$q \prec p$ となる q と $l'' \triangleright r'' \in R$ ついて次のいずれかが成立するならば $l'[l\sigma]_p \triangleright l'[r\sigma]_p \in R$ が存在する．

(a)　$l'[l]_p$ と $l''|_q$ が単一化可能となる $q \in \mathcal{FP}os(l'')$ が存在する（図 2）．

(b)　$l'[l]_p$ と $l'[l'']_q$ が単一化可能となる $q \in \mathcal{FP}os(l')$ が存在する（図 3）．■

性質 2　任意の $l \triangleright r, l' \triangleright r' \in R$ に対して，$p \in \mathcal{FP}os(l')$ と $\sigma = \mathrm{mgu}(l'|_p, l)$ が存在するならば $l'[l\sigma]_p \triangleright l'[r\sigma]_p \in R$ が存在する．■

性質 2 により，オーバーレイでない TRS における任意の規則同士の重なりを位置 ε の重なりに帰着させることができ，TRS がオーバーレイ性を持つかのように取り扱える（図 4）．

例 3　例 1 の R_1 は性質 1 を満たしていないが，以下の TRS R_3 は性質 1 を満たす．

$$R_3 = R_1 \cup \{f(a) \triangleright f(g(a))\}$$

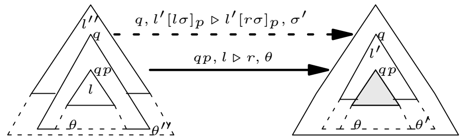

図 2　性質 1 の（a）

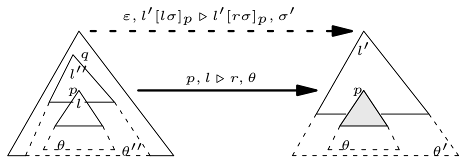

図 3　性質 1 の（b）

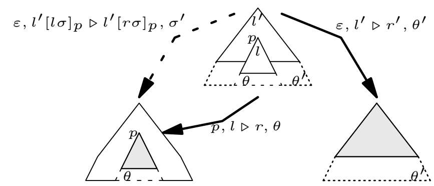

図 4　性　質　2

規則 $f(a) \triangleright f(g(a))$ によって，オーバーレイ性は失われているが，性質 2 は満たしている．R_3 において最外戦略は完全である．■

以降では，R が性質 1 かつ性質 2 を満たす左線形 TRS であるとき，最外戦略が完全な戦略になること（定理 1）を示す．その証明に必要な命題 1 と 2，および補題 1 から 6 を示し，主定理を与える．

命題 1　R は性質 1 を満たす左線形 TRS とする．$s \xrightarrow[p, l \triangleright r, \theta]{}_{\neg o} t$ について，$p \in q \cdot \mathcal{FP}os(l')$ を満たす最外リデックス $t|_q \equiv l'\theta'$ が存在するならば，以下を満たす $l'' \triangleright r'' \in R$ が存在する．

（1）　$s \xrightarrow[q, l'' \triangleright r'', \theta'']{}_R t$.

（2）　$\mathcal{FP}os(l'[\bullet]_{p/q}) \subseteq \mathcal{FP}os(l''[\bullet]_{p/q})$．ここで $\bullet$ は新しい変数を表す．

[証明]　$s \equiv s[l'\theta'[l\theta]_{p/q}]_q$，$t \equiv s[l'\theta']_q \equiv s[l'\theta'[r\theta]_{p/q}]_q$ である．ここで一般性を失わずに $\mathcal{V}ar(l) \cap \mathcal{V}ar(l') = \emptyset$ と仮定できる．よって，代入の和 $\delta = \theta \cup \theta'$ について，$s \equiv s[(l'[l]_{p/q})\delta]_q$，$t \equiv s[l'\delta]_q \equiv s[(l'[r]_{p/q})\delta]_q$ と書ける．また，$p/q \in \mathcal{FP}os(l')$ より $l'|_{p/q}\delta \equiv r\delta$ である．よって $\sigma = \mathrm{mgu}(l'|_{p/q}, r)$ について，$\delta = \sigma\theta''$ となる θ'' が存在する．ここで s の最外リデックスに関して場合分けして考える．

- $p' \prec q$ となる p' に最外リデックスが存在するとき，これを $s|_{p'} \equiv l''\theta''$ とすると $l''\theta''|_{q/p'} \equiv (l'[l]_{q/p})\delta$ である．また，この最外リデックスは s を p の位置で書換えることによってリデックスではなくなる．すなわち $p \in p' \cdot \mathcal{FP}os(l'')$ である．$q \prec p$ より $q \in p' \cdot \mathcal{FP}os(l'')$ すなわち $q/p' \in \mathcal{FP}os(l'')$ となる．よって，$l''\theta''|_{q/p'} \equiv (l'[l]_{q/p})\delta$ は性質 1 の条件（a）を満たす．
- そうでない場合，s は $q \preceq p' \prec p$ となる p' に少なくとも一つリデックスを持つ．これを $s|_{p'} \equiv l''\theta''$ とする

と，$s \equiv s[(l'[l]_{p/q})\delta]_q$ と $p' \prec p$ より $l'\delta[l''\theta'']_{p'/q} \equiv l'[l]_{p/q}\delta$ である．また，明らかに $p'/q \in \mathcal{FP}os(l')$ であるので，$l'[l'']_{p'/q}(\delta\cup\theta'') \equiv l'[l]_{p/q}(\delta\cup\theta'')$ である．よって，性質 1 の条件（b）を満たす．
いずれの場合も性質 1 より $l'[l\sigma]_{p/q} \rhd l'[r\sigma]_{p/q} \in R$ が存在する．この規則が本命題の（1）と（2）を満たすことを示す．

（1） $\mathcal{D}om(\sigma) \subseteqq \mathcal{V}ar(l'|_{p/q}) \cup \mathcal{V}ar(l)$ かつ左線形性より $\mathcal{V}ar(l'[\bullet]_{p/q}) \cap \mathcal{D}om(\sigma) = \emptyset$，すなわち，$l'[l\sigma]_{p/q} \rhd l'[r\sigma]_{p/q}$ は $(l'[l]_{p/q})\sigma \rhd (l'[r]_{p/q})\sigma$ とできる．よって，この規則と代入 θ'' により明らかに成立する．

（2） $l''[\bullet]_{p/q} \equiv l'[\bullet]_{p/q}$ より明らかである． □

命題 2 R は性質 2 を満たす左線形 TRS とする．$s \xrightarrow[p,l\rhd r,\theta]{}_{\neg o} t$ について，$p \in q\cdot\mathcal{FP}os(l')$ を満たす最外リデックス $s|_q \equiv l'\theta'$ が存在するならば，以下を満たす $l'' \rhd r'' \in R$ が存在する．

（1） $s \xrightarrow[q,l''\rhd r'',\theta'']{}_o t$.

（2） $p\cdot\mathcal{FP}os(l) \subseteqq q\cdot\mathcal{FP}os(l'')$.

［証明］ $s \equiv s[l'\theta']_q \equiv s[l'\theta'[l\theta]_{p/q}]_q$，$t \equiv s[l'\theta'[r\theta]_{p/q}]_q$ である．命題 1 の証明と同様にして，代入の和 $\delta = \theta\cup\theta'$ について $l'|_{p/q}\delta \equiv l\delta$ が得られる．よって $\sigma = \mathrm{mgu}(l'|_{p/q}, l)$ について，$\delta = \sigma\theta''$ となる θ'' が存在する．性質 2 より $l'[l\sigma]_{p/q} \rhd l'[r\sigma]_{p/q} \in R$ が存在する．次に $l'' \equiv l'[l\sigma]_{p/q}$，$r'' \equiv l'[r\sigma]_{p/q}$ として（1）と（2）を示す．

（1） 命題 1（1）の証明と同様の議論により成立．

（2） $p' \in p\cdot\mathcal{FP}os(l)$ とする．$q \prec p$ より $p'/q \in p/q\cdot\mathcal{FP}os(l)$．よって $p'/q \in \mathcal{FP}os(l'[l]_{p/q})$ である．明らかに $\mathcal{FP}os(l'[l]_{p/q}) \subseteqq \mathcal{FP}os(l'[l\sigma]_{p/q})$ であるので $p' \in p\cdot\mathcal{FP}os(l'[l\sigma]_{p/q})$ が導かれる． □

並列書換え $s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel} t$ が最外リデックスを書換えていないことを $s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel}_{\neg o} t$ で表す．すなわち，どの $q \in \Delta$ に対しても q が s の非最外リデックスであるとき，$s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel}_{\neg o}$ と書く．

補題 1 R を TRS とする．$s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel}_R t$ ならば，$s \xrightarrow{*}_o s' \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_{\neg o} t$ かつ $\Delta' \subseteqq \Delta$ である．

［証明］ $|\Delta|$ に関する帰納法により示す．$|\Delta| = 0$ のときは明らかである．$|\Delta| \geqq 1$ のとき，$s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel}_{\neg o} t$ ならば $s' \equiv s$ かつ $\Delta' = \Delta$ で明らかに成立するので，そうでない場合を考える．このとき $s \xrightarrow[p]{}_o s' \xrightarrow[\Delta-\{p\}]{\shortparallel}_R t$ となる $p \in \Delta$ が存在する．ここで，$s' \xrightarrow[\Delta-\{p\}]{\shortparallel}_R t$ について，帰納法の仮定より $s' \xrightarrow{*}_o s'' \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_{\neg o} t$ かつ $\Delta' \subseteqq \Delta - \{p\}$ である．よって $s \to_o s' \xrightarrow{*}_o s'' \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_{\neg o} t$ である．また，明らかに $\Delta' \subset \Delta$ である． □

補題 2 R は性質 1 と性質 2 を満たす左線形 TRS, $s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel}_{\neg o} t \xrightarrow[p,l\rhd r,\theta]{}_o u$ とする．各々の $q \in p\cdot\mathcal{FP}os(l)$ を満たす $q \in \Delta$ に対して，$s \xrightarrow{*}_o u$ である．

［証明］ $|\Delta|$ に関する帰納法により示す．$|\Delta| = 0$ のときは $s \equiv t \to_o u$ より明らかである．$|\Delta| \geqq 1$ のとき，次の場合を考える．

- $s \xrightarrow[\Delta-\{q\}]{\shortparallel}_{\neg o} s' \xrightarrow[q]{}_{\neg o} t$ となる $q \in \Delta$ が存在するとき，$s' \xrightarrow[q,l'\rhd r',\theta']{}_{\neg o} t$ とすると，補題の条件より $q \in p\cdot\mathcal{FP}os(l)$ である．よって，命題 1（1）より $s' \xrightarrow[p,l''\rhd r'',\theta'']{}_R t$ である．また，命題 1（2）より各々の $q' \in \Delta - \{q\}$ に対して $q' \in p\cdot\mathcal{FP}os(l'')$ である．ここで $s' \xrightarrow[p]{}_o t$ ならば，$s \xrightarrow[\Delta-\{q\}]{\shortparallel}_{\neg o} s' \xrightarrow[p]{}_o t$ について，帰納法の仮定より $s \xrightarrow{*}_o t$，すなわち $s \xrightarrow{*}_o t \to_o u$ である．一方，$s' \xrightarrow[p]{}_{\neg o} t$ ならば，$p' \prec p$ となる最外リデックス $s'|_{p'} \equiv l''\theta''$ が存在して $p \in p'\cdot\mathcal{FP}os(l'')$ である．したがって，命題 2（1）より $s' \xrightarrow[p']{}_o t$ となる $l''' \rhd r''' \in R$ が存在する．また，命題 2（2）より各々の $q' \in \Delta - \{q\}$ に対して $q' \in p'\cdot\mathcal{FP}os(l''')$ は明らかである．よって $s \xrightarrow[\Delta-\{q\}]{\shortparallel}_{\neg o} s' \xrightarrow[p']{}_o t$ について，帰納法の仮定より $s \xrightarrow{*}_o t$ である．すなわち $s \xrightarrow{*}_o t \to_o u$ である．
- それ以外の場合，$s|_{p'} \equiv l'\theta'$ を最外リデックスとすると，$q \in p'\cdot\mathcal{FP}os(l')$ となる $q \in \Delta$ が少なくとも一つ存在する．$s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel}_{\neg o} t$ を $s \xrightarrow[q]{}_{\neg o} s' \xrightarrow[\Delta-\{q\}]{\shortparallel}_R t$ とすると，$s \xrightarrow[q]{}_{\neg o} s'$ について，命題 2（1）より $s \to_o t'$ である．また，$s' \xrightarrow[\Delta-\{q\}]{\shortparallel}_R t$ については，補題 1 より $s' \xrightarrow{*}_o s'' \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_{\neg o} t$ とできる．このとき $\Delta' \subseteqq \Delta - \{q\} \subset \Delta$ より，各々の $q' \in \Delta'$ に対して $q' \in \Delta$，すなわち，$q' \in p\cdot\mathcal{FP}os(l)$ である．したがって，$s'' \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_{\neg o} t \xrightarrow[p,l\rhd r,\theta]{}_o u$ について，帰納法の仮定より $s'' \xrightarrow{*}_o u$，よって $s \to_o s' \xrightarrow{*}_o s'' \xrightarrow{*}_o u$ である． □

補題 3 R は性質 1 と性質 2 を満たす左線形 TRS とする．$s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel}_{\neg o} t \to_o u$ ならば，$s \xrightarrow{*}_o t' \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_R u$ である．

［証明］ $t \xrightarrow[p,l\rhd r,\theta]{}_o u$ とし，l に関して Δ を次のように Δ' と Δ'' に分割する．$\Delta' = \{q \mid q \in \Delta, q \in p\cdot\mathcal{FP}os(l)\}$，$\Delta'' = \Delta - \Delta'$ とする．$s \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_{\neg o} s' \xrightarrow[\Delta'']{\shortparallel}_R t$ とすると，$s' \xrightarrow[\Delta'']{\shortparallel}_R t \xrightarrow[p,l\rhd r,\theta]{}_o u$ について，左線形性より $s'|_p \equiv l\sigma$ となる σ が存在して，$s' \xrightarrow[p,l\rhd r,\sigma]{}_R t' \xrightarrow[\Delta''']{\shortparallel}_R u$ とできる．$s' \xrightarrow[p]{}_o t'$ ならば，$s \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_{\neg o} s' \xrightarrow[p]{}_o t'$ について補題 2 より $s \xrightarrow{*}_o t'$ である．一方，$s' \xrightarrow[p]{}_{\neg o} t'$ ならば，$q' \prec p$ となる最外リデックス $s'|_{q'} \equiv l'\theta'$ について，$p \in q'\cdot\mathcal{FP}os(l')$ となる．したがって，命題 2（1）より $s' \xrightarrow[q',l''\rhd r'',\sigma']{}_o t$ である．ここで $s \xrightarrow[\Delta']{\shortparallel}_{\neg o} s' \xrightarrow[q']{}_o t'$ について，命題 2（2）より各々の $q \in \Delta'$ に対して $q \in q'\cdot\mathcal{FP}os(l'')$ である．したがって，補題 2 より $s \xrightarrow{*}_o t'$ である．よって $s \xrightarrow{*}_o t' \xrightarrow[\Delta''']{\shortparallel}_R u$ である． □

補題 4 R は性質 2 を満たす左線形 TRS とする．$s \xrightarrow[\Delta]{\shortparallel}_{\neg o} t \in \mathcal{NF}$ ならば，$s \xrightarrow{*}_o t$ である．

［証明］ $|\Delta|$ に関する帰納法により示す．$|\Delta| = 0$ のときは $s \equiv t$ より明らかに成立する．$|\Delta| \geqq 1$ のとき，$s|_p \equiv l\theta$ を最外リデックスとすると，$q \in p\cdot\mathcal{FP}os(l)$ となる $q \in \Delta$ が少なくとも一つ存在する．（なぜなら，このような q が存在しないと，左

線形性より $t|_p \equiv l\theta'$ となる θ' が存在し，$t \in \mathcal{NF}$ に反する.）ここで $s \underset{\Delta}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_{\neg o} t$ を $s \underset{q}{\rightarrow}_{\neg o} s' \underset{\Delta-\{q\}}{+\!\!\!+\!\!\!\longrightarrow}_R t$ とすると，$s \underset{q}{\rightarrow}_{\neg o} s'$ について，命題 2（1）より $s \underset{p}{\rightarrow}_o s'$ である．一方，$s' \underset{\Delta-\{q\}}{+\!\!\!+\!\!\!\longrightarrow}_R t$ については，補題 1 より $s' \xrightarrow{*}_o s'' \underset{\Delta'}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_{\neg o} t$ かつ $\Delta' \subseteqq \Delta - \{q\}$ である．$s'' \underset{\Delta'}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_{\neg o} t$ について帰納法の仮定より $s'' \xrightarrow{*}_o t$，よって $s \rightarrow_o s' \xrightarrow{*}_o s'' \xrightarrow{*}_o t$ である． □

補題 5 R は性質 1 と性質 2 を満たす左線形 TRS とする．$s \underset{\Delta}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_R t \xrightarrow{*}_o u \in \mathcal{NF}$ ならば，$s \xrightarrow{*}_o u$ である．

[証明] $t \xrightarrow{n}_o u$ の n に関する帰納法により示す．まず，$s \underset{\Delta}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_R t$ について，補題 1 より $s \xrightarrow{*}_o s' \underset{\Delta'}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_{\neg o} t$ である．$n = 0$ のとき，$t \equiv u$ すなわち t は正規形である．したがって $s' \underset{\Delta'}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_{\neg o} t \in \mathcal{NF}$ について，補題 4 より $s' \xrightarrow{*}_o t$ である．よって $s \xrightarrow{*}_o s' \xrightarrow{*}_o t \equiv u$ となり成立する．$n \geqq 1$ のとき，$t \xrightarrow{n}_o u$ を $t \rightarrow_o t' \xrightarrow{n-1}_o u$ とすると，$s' \underset{\Delta'}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_{\neg o} t \rightarrow_o t'$ について補題 3 より $s' \xrightarrow{*}_o s'' \underset{\Delta''}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_R t'$ である．ここで $s'' \underset{\Delta''}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_R t' \xrightarrow{n-1}_o u$ について，帰納法の仮定より $s'' \xrightarrow{*}_o u$，よって $s \xrightarrow{*}_o s' \xrightarrow{*}_o s'' \xrightarrow{*}_o u$ である． □

補題 6 R は性質 1 と性質 2 を満たす左線形 TRS とする．$s \rightarrow_{\neg o} t \xrightarrow{*}_o u \in \mathcal{NF}$ ならば，$s \xrightarrow{*}_o u$ である．

[証明] $\rightarrow_{\neg o} \subseteqq \underset{\Delta}{+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow}_R$ と補題 5 より明らかに成立する． □

定理 1 (完全性) R は性質 1 と性質 2 を満たす左線形 TRS とする．$s \xrightarrow{*}_R t \in \mathcal{NF}$ ならば，$s \xrightarrow{*}_o t$ である．

[証明] $s \xrightarrow{n}_R t \in \mathcal{NF}$ の n に関する帰納法により示す．$n = 0$ のときは $s \equiv t$ より明らか．$n \geqq 1$ のとき，$s \xrightarrow{n}_R t$ がすべて最外書換えの場合は明らかに成立するので，少なくとも一つは最外ではない書換えを含むとする．このとき，$s \xrightarrow{*}_o s' \rightarrow_{\neg o} s'' \xrightarrow{\leq n}_R t$ とできる．$s'' \xrightarrow{\leq n}_R t$ について，帰納法の仮定より $s'' \xrightarrow{*}_o t$ である．ここで $s' \rightarrow_{\neg o} s'' \xrightarrow{*}_o t$ について，補題 6 より $s' \xrightarrow{*}_o t$ である．よって $s \xrightarrow{*}_o s' \xrightarrow{*}_o t$ である． □

重なりを持つ TRS のクラスとして**強オーバーレイ**というクラスがある [7]．R が強オーバーレイであるとは，R におけるどの規則同士についても，重なりがあるならば左辺が変数の名前替えのもとで等しいことをいう．

文献 [7] では，並列な位置にあるすべての最外リデックスを同時に書換える**並列最外戦略**が完全であることが示されている．しかし，一般に，並列最外戦略が完全である TRS のクラスに対して，最外戦略が完全であるとは限らない．

例 4 以下の TRS R_4 において，並列最外戦略は完全であるが，最外戦略は完全ではない．

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{l} f(a,a) \rhd c \\ f(x,a) \rhd d \\ f(a,x) \rhd e \\ b \rhd a \end{array} \right\}$$

$f(b,b)$ の正規形 c, d, e のうち，c に到達するには $f(a,a)$ を経由しなければならない．並列最外書換えを $+\!\!\!+\!\!\!\rightarrow_{po}$ で表すと $f(b,b) \underset{\{1,2\}}{+\!\!\!+\!\!\!\longrightarrow}_{po} f(a,a)$ ではあるが，これに対応する最外書換え $f(b,b) \xrightarrow{*}_o f(a,a)$ は存在しない． ■

しかしながら，本節で提案した性質を満たすクラスは強オーバーレイ TRS を包含している．したがって，定理 1 の系として最外戦略の完全性を得ることができる．

系 1 R が左線形な強オーバーレイ TRS であるとき，最外戦略は完全である． □

5. 最外戦略が完全な TRS への等価変換

前節で与えた十分条件を満たす TRS のクラスは重なりを許すクラスに対して決して広くはない．しかし，与えられた TRS からこの十分条件を満たす TRS への等価変換が可能であれば，最外戦略が完全にならない TRS のクラスに対しても，事実上，最外戦略によってすべての正規形に到達可能になるため有用である．ここでの等価変換とは，変換前後で TRS の書換え関係が変わらないことをいう．本節では，このような TRS への等価変換の手法について述べる．

定義 1 R を TRS とする．R に対して $\mathcal{T}_a(R)$ と $\mathcal{T}_b(R)$ を次で与えられる規則の集合とする．

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a(R) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad & \{\, l'[l\sigma]_p \rhd l'[r\sigma]_p \mid l \rhd r, l' \rhd r' \in R, \\ & p \in \mathcal{FP}os(l'), \sigma = \mathrm{mgu}(l'|_p, r), \exists l'' \rhd r'' \in R, \\ & \exists q \in \mathcal{FP}os(l''),\ \exists \sigma' = \mathrm{mgu}(l'[l]_p, l''|_q) \,\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_b(R) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad & \{\, l'[l\sigma]_p \rhd l'[r\sigma]_p \mid l \rhd r, l' \rhd r' \in R, \\ & p \in \mathcal{FP}os(l'), \sigma = \mathrm{mgu}(l'|_p, r), \exists l'' \rhd r'' \in R, \\ & \exists q \in \mathcal{FP}os(l'), \exists \sigma' = \mathrm{mgu}(l'[l]_p, l'[l'']_q) \,\} \end{aligned}$$

$\mathcal{T}_a(R)$ と $\mathcal{T}_b(R)$ を用いて，性質 1 を満たすための変換 $\mathcal{T}_1$ を次のように与える．

$$\mathcal{T}_1(R) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad R \cup \mathcal{T}_a(R) \cup \mathcal{T}_b(R)$$

性質 2 を満たすための変換 $\mathcal{T}_2$ を次のように与える．

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2(R) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad & R \cup \{\, l'[l\sigma]_p \rhd l'[r\sigma]_p \mid l \rhd r, l' \rhd r' \in R, \\ & p \in \mathcal{FP}os(l'), \sigma = \mathrm{mgu}(l'|_p, l) \} \end{aligned}$$

これを用いて，TRS 変換 $\mathcal{T}$ を $\mathcal{T}(R) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(R))$ と定義する．また，$\mathcal{T}^i(R)$ は R に変換 $\mathcal{T}$ を i 回適用することを表す．さらに，$\mathcal{T}^{k+1}(R) = \mathcal{T}^k(R)$ を満たす k が存在するとき，$\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R) = \mathcal{T}^k(R)$ と定義する． ■

$\mathcal{T}_a$，$\mathcal{T}_b$ はそれぞれ性質 1 の（a），(b）を満たす規則を見つけ出し，それらの規則から必要な規則を生成する．また，$\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R)$ を定義する k が存在しないとき，TRS 変換は R に対して停止しない．以下に TRS 変換 $\mathcal{T}$ を適用した例を示す．

例 5　例 1 の左線形性を持つ TRS R_1 について，TRS 変換は以下のように進む．

- $\mathcal{T}^0(R_1) = R_1$
- $\mathcal{T}^1(R_1) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(\mathcal{T}^0(R_1))) = R_1 \cup \{f(a) \triangleright f(g(a))\}$
- $\mathcal{T}^2(R_1) = R_1 \cup \{f(a) \triangleright f(g(a))\} = \mathcal{T}^1(R_1)$

このようにして，$\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R_1) = \mathcal{T}^1(R_1)$ を得る．$\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R_1)$ は例 3 の R_3 に等しく，この TRS は左線形性，性質 1，性質 2 のいずれも満たす．■

TRS 変換 $\mathcal{T}$ の正当性に関する以下の補題を示す．

補題 7　TRS R と TRS 変換 $\mathcal{T}$ について，以下のいずれも成立する．

（1） $\rightarrow_{\mathcal{T}(R)} = \rightarrow_R$

（2） R が左線形ならば $\mathcal{T}(R)$ も左線形である．

（3） $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R)$ が存在するとき，$\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R)$ は性質 1 と性質 2 を満たす．

［略証］　（1）（2）（3）のそれぞれが成立することを示す．

（1） 変換 $\mathcal{T}$ によって得られた規則 $l'[l\sigma]_p \triangleright l'[r\sigma]_p$ について，$l'[l\sigma]_p \xrightarrow[p,l\triangleright r,\sigma]{}_R l'[r\sigma]_p$ より明らか．

（2） 一般性を失わずに $\mathcal{V}ar(l) \cap \mathcal{V}ar(l') = \emptyset$ と仮定できるので明らか．

（3） $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R)$ が性質 1 または性質 2 を満たしていないとすると，$\mathcal{T}(\mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R)) \neq \mathcal{T}^{\mathcal{S}}(R)$ が導かれる．□

次に，本稿で提案した性質を満たすクラスの条件をさらに緩めることができるという可能性を示す．

例 6　次の TRS R_5 について考える．

$$R_5 = \left\{ \begin{array}{l} f(x,a,a) \triangleright c \\ f(x,y,z) \triangleright d \\ b \triangleright a \end{array} \right\}$$

これに TRS 変換 $\mathcal{T}$ を適用すると，追加規則の集合 R_6 を得る．

$$R_6 = \left\{ \begin{array}{l} f(x,b,a) \triangleright f(x,a,a) \\ f(x,a,b) \triangleright f(x,a,a) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x,b,b) \triangleright f(x,b,a) \\ f(x,b,b) \triangleright f(x,a,b) \end{array} \right\}$$

$R_5 \cup R_6$ において，最外戦略は完全な戦略となる．ここで，以下の R'_6 を考える．

$$R'_6 = \left\{ \begin{array}{l} f(x,b,y) \triangleright f(x,a,y) \\ f(x,y,b) \triangleright f(x,y,a) \end{array} \right\}$$

$R_5 \cup R'_6$ は性質 1 を満たしていないが，この TRS において最外戦略は完全である．■

TRS における書換えは，TRS の規則が少ないほど効率よく実行することができる．したがって，例 6 は，条件の緩和のみならず，TRS の最適化に関する以下の予想を示唆している．

予想 1　TRS $R \cup \{l \triangleright r\}$ において最外戦略が完全であるとする．このとき，$l \xrightarrow[\varepsilon,l'\triangleright r',\sigma]{}_R r$ となる $l' \triangleright r' \in R$ が存在するならば，R においても最外戦略は完全である．□

6. ま と め

本稿では，重なりを持つ TRS において，左線形性，性質 1，性質 2 のすべてを満たしているならば，最外戦略が完全な書換え戦略になることを示した．また，この結果を有効に利用するひとつの手段として，与えられた TRS を上記の条件を満たす TRS へと等価変換する方法を示した．これにより，変換が停止するならば，最外戦略が完全にはならない左線形 TRS においても，事実上，すべての正規形に最外戦略によって到達することが可能になった．

左線形かつ重なりを持たない TRS に対して正規化戦略となる強逐次戦略 $\rightarrow_S$，NV 逐次戦略 $\rightarrow_{NV}$ などは，$\rightarrow_{NV} \subseteqq \rightarrow_S \subseteqq \rightarrow_o$ であり，最外戦略よりも効率面での向上が期待できる．これらの戦略を重なりが原因で合流性を持たない TRS に対して拡張し，正規化戦略となるクラスを本稿の性質を利用して明らかにすることなどが今後の課題である．

謝 辞　本研究は一部，科研費#15500007，#16650005，#17700009 ならびに名古屋大学 21 世紀 COE プログラム（社会情報基盤のための音声・映像の知的統合）の補助を受けている．

文　　献

[1] F. Baader, T. Nipkow：Term Rewriting and All That, Cambridge University Press, 1998.

[2] I. Durand and A. Middeldorp：Decidable Call by Need Computations in Term Rewriting (Extended Abstract), Proc. of the 14th Int. Conf. on Automated Deduction (CADE'97), LNAI, *1249*, 1997, pp.4–18.

[3] G. Huet, J. J. Lévy：Computations in Orthogonal Rewriting Systems, I and II, in Computational Logic, Essays in Honor of Alan Robinson, The MIT Press, 1991, pp.396–443.

[4] Y. Toyama：Strong Sequentiality of Left-Linear Overlapping Term Rewriting Systems, The 7th annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 1992, pp.274–284.

[5] M. Sakai, K. Okamoto, T. Sakabe：Innermost Reductions Find All Normal Forms on Right-Linear Terminating Overlay TRSs, Proc. of 3rd Int'l Workshop on Reduction Strategies in Rewriting and Programming (WRS'03), Valencia, Spain, 2003, pp.79–88.

[6] N. Nishida, M. Sakai, T. Sakabe：Partial Inversion of Constructor Term Rewriting Systems, Proc. of the 16th Int. Conf. on Rewriting Techniques and Applications (RTA'05), LNCS, *3467*, 2005, pp.264–298.

[7] 水野，草刈，酒井，坂部：左辺が一致するオーバレイ性を持つ左線形 TRS の正規化戦略，計算機科学基礎理論の新展開，京都大学数理解析研究所講究録，*1375*，2004，pp.247–252.

[8] 岡本，酒井，西田，草刈，坂部：弱最内戦略を完全にする項書換え系の等価変換，計算機科学基礎理論とその応用，京都大学数理解析研究所講究録，*1426*，2005，pp.119–125.